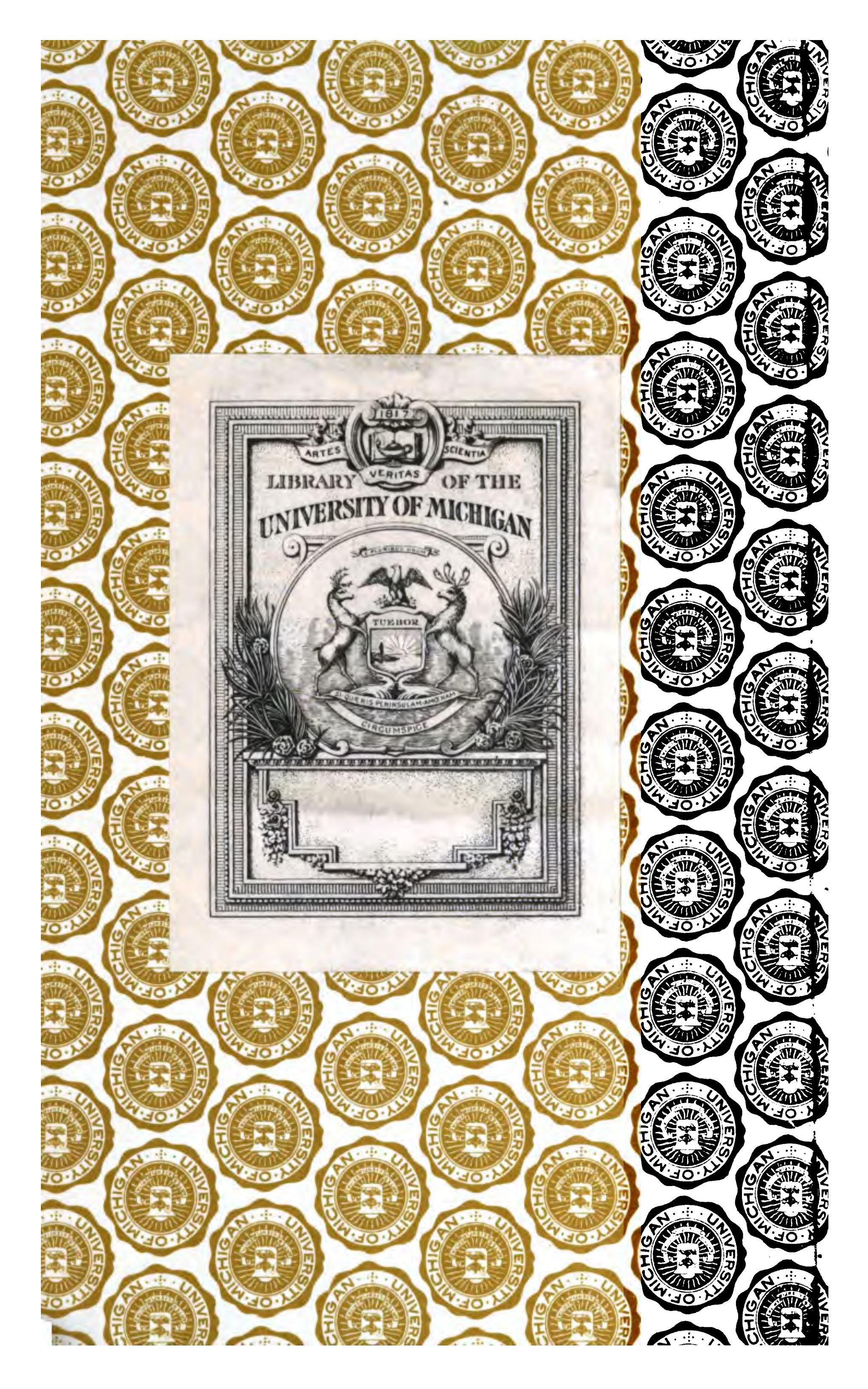
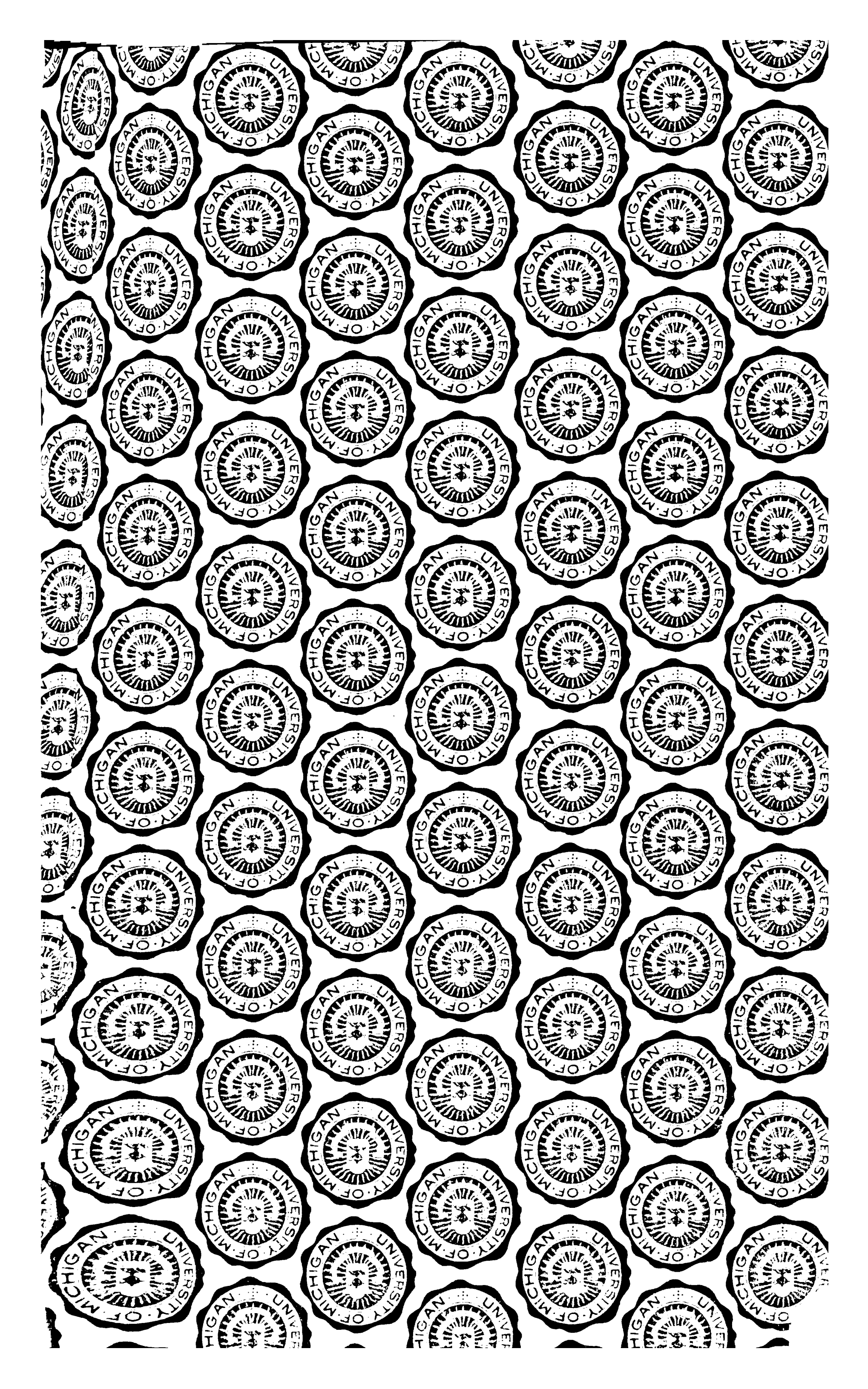

1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE
UNIVERSITY OF MICHIGAN


UNIVERSITY OF MICHIGAN

COURS
DE
MATHÉMATIQUES.

TOME III.

COURS COMPLET
DE
MATHÉMATIQUES,

PAR M. L'ABBÉ SAURI,

ANCIEN PROFESSEUR DE PHILOSOPHIE EN L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER.



TOME TROISIEME.

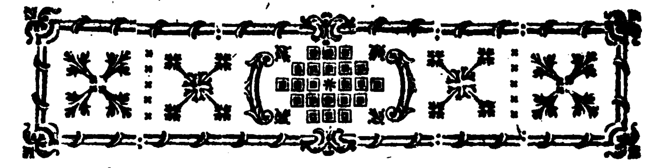


A PARIS,

Chez JEAN-FRANÇOIS BASTIEN, Libraire, rue du Petit-Lion, Fauxbourg Saint-Germain.

M. DCC. LXXVIII.

Avec Approbation & Privilege du Roi.



DISCOURS

PRÉLIMINAIRE.

A PEINE les Géomètres eurent-ils commencé à comparer les figures rectilignes avec les curvilignes, qu'ils firent uſage des raiſons & des quantités dont la différence devenoit plus petite qu'aucune grandeur donnée. Les Mathématiciens qui ſuivirent, ennuyés de la longueur des démonſtrations, établirent quelques lemmes dont ils faiſoient uſage dans les recherches particulieres. Tous ces lemmes ſont renfermés dans ce principe : *les quantités & les rapports des quantités qui vont en s'approchant de l'égalité, de maniere que leur différence devient plus petite qu'aucune quantité donnée, ſont, à la fin égales.* Ce principe eſt évident ; car, ſi on ſuppoſe qu'à la fin leur différence ſoit D, quantité donnée, elles ne pourroient pas approcher de l'égalité plus près que de la quantité D, ce qui eſt contre l'hypothèſe. Si peu qu'on ſoit verſé dans la lecture d'Apollonius, d'Archimède & de

Pappus, on ne sauroit disconvenir que les Grecs n'eussent des méthodes pour mener les tangentes des courbes, mais elles étoient longues & laborieuses. Quoi de plus pénible, en effet, que de démontrer qu'une ligne droite menée à un point d'une courbe, est tangente de cette courbe, lorsque les ordonnées voisines, l'une de la droite, l'autre de la gauche, & terminées à cette ligne, sont à la fois plus grandes ou à la fois plus petites que celles de la courbe? quoi de plus prolixe que de mesurer les aires curvilignes par des figures inscrites & circonscrites? Fermat est le premier, je pense, qui, pour mesurer les lignes courbes, ait employé deux figures, dont l'une a un plus grand périmètre & l'autre un plus petit périmètre que celui de la courbe. Mais son invention n'est pas d'une grande utilité.

Cavalieri de Milan, suivant la route que le célèbre Galilée, dont il avoit été auditeur, avoit tracée dans ses dialogues de la *Nouvelle Science*, fit imprimer à Boulogne en 1635 un Ouvrage considérable sur la méthode des indivisibles, dans lequel on trouve des recherches précieuses sur les rapports & les mesures des surfaces & des solides curvilignes. Toricelli,

Roberval, Tacquet & presque tous les Géomètres de ce tems-là, firent usage de cette méthode.

On ne doit pas passer sous silence Grégoire de S. Vincent & Wallis qui, excités par les découvertes de Cavalieri, travaillerent avec succès à l'avancement des Mathématiques. Mais, quoique Cavalieri & ceux qui, après lui, ont fait usage de la méthode des indivisibles, paroissent n'avoir prétendu autre chose sinon, qu'il y a la même proportion entre les solides & les surfaces qu'entre les surfaces & les lignes, bien des gens ont pensé que la méthode consistoit à faire voir que les solides sont composés de surfaces, les surfaces de lignes & les lignes de points, ce qui sans doute seroit un paralogisme des plus palpables; car les points Mathématiques n'ayant aucune longueur, les lignes aucune largeur, & les surfaces aucune épaisseur, un assemblage de points ne sauroit produire une ligne, ni un assemblage de lignes une surface, ni un assemblage de surfaces un solide. Les anciens Mathématiciens jaloux de conserver l'évidence géométrique dans leurs procédés n'ont jamais passé par ces degrés; c'est-à-dire, ne sont jamais descendus des solides aux

surfaces, des surfaces aux lignes, & des lignes aux points (*).

Avant que la méthode des indivisibles eût paru, l'illustre Fermat en avoit donné une pour mener les tangentes des courbes, & pour trouver les *maxima* & les *minima*. L'Ouvrage de ce Géomètre fut suivi de la nouvelle Méthode de Newton & de Leibnitz, je veux dire, de la Méthode des Fluxions ou des Infiniment petits. Mais je ne puis me persuader que tous ceux qui en ont fait usage, ou qui l'ont enrichie s'en soient formé la même idée. En effet, en lisant les Livres modernes qui traitent du Calcul Différentiel ou du Calcul des Infiniment petits, on a bien de la peine à s'empêcher de penser que leurs Auteurs désignent des quantités finies sous le nom d'Infiniment petites, quoiqu'ils assûrent qu'elles sont beaucoup plus petites que celles auxquelles ils les comparent, comme si par exemple, on compare une goutte d'eau avec l'Océan, ou un grain de poussiere avec le globe

(*) Ceux qui voudront avoir quelques notions métaphysiques sur la nature des lignes, peuvent consulter la Dissertation sur le tems que nous avons mise dans notre Métaphysique.

terrestre. C'est-là, sans doute, ce qui a porté plusieurs Savans à critiquer & à rejetter cette belle théorie. Mac-Laurin voulant ôter tout sujet de dispute, a entrepris de démontrer les loix du Calcul Infinitésimal selon la méthode des anciens Géomètres; mais ses démonstrations, quoique rigoureuses & claires, supposent beaucoup de patience dans le lecteur. Le célèbre Euler prétend que les quantités différentielles ne sont autre chose que de purs riens, nous ne saurions être de l'avis de ce grand homme, pour les raisons que nous avons données dans notre Calcul Différentiel; nous ne pouvons non plus, adopter l'opinion du grand Newton qui regarde les différentielles ou fluxions comme des quantités évanouissantes; parce que l'on ne peut considérer une chose dans son passage du néant à l'être, ou de l'existence à la non-existence: mais il nous paroît, ainsi que nous l'avons dit dans nos recherches Métaphysiques sur la nature du Calcul Différentiel, (recherches que nous avons insérées dans la premiere section de la seconde partie de ce Cours), que les différentielles sont des quantités qui sont quelque chose dans le calcul & qui s'évanouissent, à la fin du calcul. Tel

eſt, ſelon nous, l'artifice du Calcul Différentiel, qui avoit échappé à bien des gens.

A peine la nouvelle méthode fut-elle connue que les Géomètres travaillerent à la perfectionner. Les deux freres, Jacques & Jean Bernoulli l'enrichirent des plus belles découvertes. Tout le monde ſait que le Calcul Infinitéſimal a deux parties, le Calcul Différentiel & le Calcul Intégral, ou le Calcul des Fluxions & celui des Fluentes. Le premier paſſe d'une équation finie à une autre qui renferme des quantités infiniment petites ou inaſſignables: comme il étoit bien plus facile que le ſecond, on eut bientôt trouvé le moyen de différencier une quantité donnée dans tous les cas; de-là a réſulté la méthode directe des tangentes, celles des *maximis* & *minimis*, &c; mais lorſqu'on a voulu rectifier les lignes courbes, quarrer les ſurfaces, cuber les ſolides, on a eu beſoin de cette opération qu'on nomme intégration, par le moyen de laquelle on paſſe d'une équation différentielle à l'équation finie qui l'avoit produite. Mais toutes les formules différentielles n'étant pas ſuſceptibles d'une intégrale algébrique, on a eu recours aux ſéries par le moyen deſ-

quelles on trouve des intégrales exprimées par un nombre infini de termes. Brunker, Mercator & Jacques-Grégoire, avoient démontré depuis long-tems que l'aire hyperbolique peut être exprimée par une ſérie infinie. Après Newton & les autres Anglois de cette école, cette méthode eſt devenue d'un grand uſage. Leibnitz, les deux freres Bernoulli, & le grand Euler en ont trouvé pluſieurs; mais pour retirer un certain avantage des ſéries, il faut les rendre auſſi convergentes qu'il eſt poſſible.

La méthode d'intégrer les formules par les quadratures eſt bien plus élégante & plus utile; mais les Géomètres preſcrivent avec raiſon de s'abſtenir des courbes plus élevées, lorſque les plus ſimples ſuffiſent. Vers la fin du ſiècle dernier, le ſublime Newton nous a donné un Traité des Quadratures, digne de ce grand Géomètre. Cotes, Moivre & Simpſon, travaillant ſur la même matiere, ont intégré beaucoup de formules par les angles & les logarithmes. On trouve auſſi une table ſemblable & aſſez étendue dans le Traité des Fluxions & Fluentes du ſavant Muller; mais le ſtyle concis dont il eſt écrit, & les fautes d'impreſſion qui ſe ſont gliſſées

dans l'édition françoise, ne permettent pas d'espérer qu'il puisse être d'une grande utilité à nos jeunes Mathématiciens.

Quoique nous devions beaucoup aux recherches des Géomètres Anglois, on auroit tort de penser que les autres nations n'ont rien fait pour perfectionner le Calcul Intégral. Quiconque aura lû l'Ouvrage de Jacques Bernoulli, les Œuvres de Jean Bernoulli son frere, en 4 vol. *in*-4°. ne pourra pas s'empêcher de convenir que ces deux célèbres Géomètres ont rendu les plus grands services aux Mathématiques.

Le Calcul Logarithmique & Exponentiel, dont Jean Bernoulli avoit déja donné les principales règles dans les Actes de Leipsick année 1697, a ouvert un vaste champ aux recherches des Mathématiciens, & a fourni la solution d'un grand nombre de problêmes très-difficiles.

Lorsqu'il est question de l'intégration d'une formule différentielle, l'élégance paroît demander qu'on préfére la rectification à la quadrature, puisqu'il est bien plus facile de mesurer l'arc d'une courbe que son aire. Jean Bernoulli dans les Actes de Leipsick année 1724, a traité savamment cette matiere. Saladini a trouvé

le moyen de ſuppléer au théorême de Bernoulli, qui ſouvent conduit à une formule imaginaire ; enfin le célèbre Euler a donné une Théorie très-ſavante ſur la même matiere : mais elle eſt ſi ſublime qu'elle demande beaucoup de travail, ſi l'on veut faire l'application des règles générales à des formules particulieres. Enfin le grand Géomètre d'Alembert qu'on peut comparer à peu de Savans, a ramené l'intégration d'un très-grand nombre de formules différentielles à la rectification de l'ellipſe & de l'hyperbole, ſéparément ou enſemble ; il paroît avoir épuiſé cette matiere. Les freres Bernoulli, Manfredi, le Comte Jacques Ricati, Daniel & Nicolas Bernoulli, Vincent Ricati ont beaucoup travaillé ſur l'intégration des différentielles à pluſieurs variables : mais M. d'Alembert, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, s'eſt ouvert une route nouvelle pour la ſéparation des indéterminées, Théorie ſur laquelle le Comte Ricati, Jean Bernoulli, &c. avoient déja fait beaucoup de recherches. Il prend deux équations qui contiennent trois indéterminées, & multipliant l'une des deux par un coëfficient indéterminé, il ajoute enſuite ces deux

équations, ayant ſoin de déterminer le multiplicateur, de maniere que l'intégration puiſſe avoir lieu. Cette méthode des coëfficients indéterminés dont nous avons parlé aſſez au long, peut s'appliquer à un plus grand nombre d'équations, en introduiſant pluſieurs coëfficients indéterminés. Mais malgré les travaux de tant de grands hommes, il y a encore beaucoup d'équations différentielles du premier ordre dont on ne peut ni ſéparer les indéterminées, ni trouver l'intégrale algébrique, ou exprimée par des arcs de cercle ou par des logarithmes. Il ſeroit donc ſouvent utile de conſtruire géométriquement les différentielles qui ſont dans ce cas; c'eſt ce qui m'a déterminé à parler d'une méthode de conſtruction qui me paroît facile à mettre en pratique.

Mais les difficultés ſont bien plus grandes, lorſqu'on paſſe aux différentielles du ſecond degré ou de degrés ſupérieurs. Il eſt vrai que Jean Bernoulli, Taylor, le Comte Ricati, Vincent Ricati, Lexell, Clairaut, Fontaine, les P. P. le Seur & Jacquier, le Marquis de Condorcet, la Grange, Euler, d'Alembert, &c. ont beaucoup travaillé ſur ces matieres; cependant, malgré les efforts de tant de ſa-

meux Géomètres, il nous manque, & il nous manquera, ſans doute, long-tems & même toujours, une méthode générale & praticable pour intégrer les équations des degrés ſupérieurs. Meſſieurs Clairaut, Fontaine, le Marquis de Condorcet, d'Alembert & Euler ont cherché à déterminer les conditions que doit avoir une équation différentielle pour être ſuſceptible d'intégration. M. le Marquis de Condorcet a fait connoître dans quels cas une équation différentielle d'un ordre donné étoit ſuſceptible d'une, de deux, de trois, &c. intégrations.

Preſque dès l'origine du Calcul Différentiel, les Géomètres s'étoient occupé du fameux problême des trajectoires orthogonales qui coupent une famille de courbes à angles droits. Après les travaux de Jean Bernoulli & de pluſieurs autres, le fameux Euler a jugé la matiere encore digne de lui, & il nous a donné des choſes très-curieuſes ſur cette théorie. Le problême des iſoperimètres avoit auſſi occupé les deux Bernoulli, Jean & Jacques; mais, M. Euler, dans ſon excellent Ouvrage, intitulé, *Methodus inveniendi curvas maximi minimi-ve proprietate gaudentes*, a traité cette matiere avec beaucoup d'élégance & de clarté.

Cependant il paroît que le nouveau Calcul des Variations que le subtil M. de la Grange nous a donné dans le second volume des Mémoires de Turin, & que M. Euler a traité aussi dans le troisieme volume de son Calcul Intégral, peut fournir des méthodes plus parfaites pour la solution de ce beau problême.

Jusqu'ici j'ai parlé des découvertes & des inventeurs, parcourons rapidement les collections, c'est-à-dire, les Ouvrages dans lesquels on a rassemblé les vérités dispersées dans les Mémoires des Académies & dans d'autres livres. Les principaux Ouvrages de ce genre, sont l'Analyse démontrée de Regneau, le Cours de Mathématiques de Wolff, les Institutions de Marie Agnesi, l'Analyse des Infiniment petits du Marquis de l'Hôpital connue de tout le monde; la Méthode de trouver la mesure des surfaces & des solides de M. Carré qui a paru en 1700, mais ce Livre n'est pas exempt d'erreur; la Méthode de Manfredi, de construire les équations différentielles du premier degré année 1707. Nous devons aussi dire quelque chose de la *Méthode directe & inverse des increments* du célèbre Taylor, Ouvrage dans lequel on desireroit un style moins concis &

plus de clarté. Le Calcul intégral de Stone imprimé à Paris année 1736, dont Bernoulli a fait voir les erreurs & les bévues. La Méthode des Fluxions & des Séries infinies du Chevalier Newton, imprimée pour la premiere fois en 1736, & qui a été imprimée en François en 1740 méritent l'attention des Savants. Les Leçons de Jean Bernoulli sur le Calcul Intégral qui ont paru en 1742 dans le tome trois de ses Œuvres, le Traité des Fluxions de Mac-Laurin que ce Géomètre a composé pour répondre à un Ouvrage imprimé en Angleterre en 1734, dans lequel l'Auteur avoit entrepris de renverser la Géometrie & les nouvelles Méthodes; le Calcul Intégral de M. de Bougainville en deux vol. *in*-4°, dans lequel on trouve un grand nombre de découvertes dues à M. d'Alembert. Il seroit à souhaiter que cet Ouvrage eût été rendu plus clair par les applications à la Géométrie & par les exemples. Le second tome des Institutions Analytiques par Ricati & Saladini en 769 pages *in-fol.*, dans lequel on trouve la méthode de différencier & d'intégrer les formules à une & à plusieurs variables, la méthode d'intégrer par les séries, par la quadrature & la rectification des courbes, le calcul

logarithmique & exponentiel, l'intégration des fractions rationelles, l'intégration des formules qui renferment des sinus ou des cosinus, la méthode directe & inverse des tangentes, celle des *maximis* & des *minimis*, la méthode de séparer les indéterminées dans les équations différentielles, différentes méthodes pour intégrer les équations différentielles des ordres supérieurs, les méthodes pour trouver les rayons osculateurs & les développées, la théorie des trajectoires, les méthodes pour trouver les courbes susceptibles du *maximum* & du *minimum*, & plusieurs autres choses, dont il seroit trop long de faire l'énumération. Mais il seroit à souhaiter que cet Ouvrage latin, dont nous avons beaucoup profité, fût écrit avec plus de méthode & de clarté. Le Calcul Intégral des PP. le Seur & Jacquier, en deux volumes *in*-4°., le premier de 548 pages, le second de 591 pages, imprimé à Parme en 1768, mérite aussi l'attention des Géomètres; on y trouve de fort belles méthodes pour intégrer les équations & les formules différentielles, à une & à plusieurs variables, avec un traité des variations, mais les applications à la Géométrie s'y font desirer: cependant cet

Ouvrage nous a été de la plus grande utilité & nous l'avons même copié en quelques endroits.

Il nous reste à parler des Ouvrages du savant Euler dont nous avouons avec reconnoissance avoir beaucoup profité, quoique nous nous soyons quelquefois écartés de ses idées que nous n'avons pas crû pouvoir adopter dans tous les cas. Son livre, intitulé : *Institutiones calculi differentialis cùm ejus usu in analysi infinitorum ac doctrinâ serierum*, imprimé à Berlin année 1755, contient dans 880 pages *in*-4°. la méthode de différencier une quantité quelconque, la théorie des *maximis & minimis*, l'application du Calcul Différentiel aux séries & aux équations, &c. Le Calcul Intégral du même Auteur en 3 vol. *in*-4°. imprimé à Petersbourg & dont le dernier volume a paru en 1770, traite fort au long des méthodes d'intégrer les équations différentielles à une & à plusieurs variables, & du Calcul des Variations; mais cet Ouvrage latin ne renfermant pas les applications à la Géométrie, ne peut non plus que son Calcul Différentiel, être utile qu'à ceux qui sont déja initiés dans les nouvelles méthodes. A ces livres nous devons joindre les Ouvrages de Segner &

d'Hennert, quelques Mémoires de différentes Académies & les Opuscules du grand d'Alembert. Tels sont les principaux Géomètres dont on trouvera les méthodes dans l'Ouvrage que nous donnons aujourd'hui au public. Il y a encore quelques Livres élémentaires qui traitent du Calcul Infinitésimal, tels que M. l'Abbé Deidier, Bezout, Simpson dont je ne parle pas, parce qu'ils sont assez connus.

Nous allons maintenant donner une idée des objets que nous avons traités, & de la méthode que nous avons suivie dans la seconde partie de ce Cours de Mathématiques. Nous l'avons divisée en quatre sections ; la premiere contient les principes généraux du Calcul Différentiel & du Calcul Intégral avec les applications de ce premier Calcul ; la seconde renferme les applications du Calcul Intégral à la Géométrie ; la troisieme traite de l'intégration des formules & des équations différentielles, & du Calcul des Variations ; la quatrieme enfin renferme l'application de l'analyse à de beaux problêmes Physico-Mathématiques. Dans la premiere section, après avoir développé le plus clairement qu'il m'a été possible les principes généraux du Calcul Différentiel & du Calcul Intégral

Intégral qui en est l'inverse (*), après avoir traité des différences des ordres supérieurs & de leur intégration, je fais des applications aux sous-tangentes des courbes, j'apprends à différencier & à intégrer les quantités logarithmiques & exponentielles, & celles qui renferment des sinus, des cosinus, tangentes, cotangentes, sécantes & cosécantes. Je passe ensuite aux tangentes, sous-normales & normales, à la méthode de déterminer l'angle de la courbe avec une ligne parallèle aux abcisses ou aux ordonnées. Je parle aussi des asymptotes des courbes, tant de celles dont les ordonnées sont parallèles que de celles dont les ordonnées partent d'un point qu'on nomme foyer.

Je traite ensuite de la fraction $\frac{0}{0}$ & des tangentes qui en dépendent, de la méthode des *maximis* & des *minimis* que j'ai développée avec le plus grand soin, à cause de son utilité dans les Sciences Physico-Mathéma-

(*) C'est la raison pour laquelle j'ai d'abord mené, pour ainsi dire, ces deux calculs de front, m'écartant en cela de la méthode ordinaire. Les règles du calcul intégral étant une suite de celles du calcul différentiel, je pense que les commençants auront plus de facilité à saisir les règles du calcul intégral, en les leur présentant aussi-tôt après celles du calcul différentiel, que si l'on vouloit les y ramener dans la suite après les applications de ce dernier.

tiques ; j'en ai fait d'abord l'application à la Géométrie, faiſant remarquer en même-tems qu'il y a des occaſions dans leſquelles on peut facilement trouver le *maximum* ou le *minimum* ſans le ſecours du Calcul Différentiel, comme je l'ai fait voir en démontrant que le cercle eſt la plus grande des figures iſoperimètres. Venant enſuite aux fonctions algébriques, j'apprends à trouver les cas dans leſquels elles deviennent un *maximum* ou un *minimum*, quel que ſoit le nombre des variables ; j'ai éclairci cette théorie par pluſieurs exemples ; j'en ai même fait l'application à une fonction aſſez compliquée de trois variables, ce que je ne ſache pas avoir été fait encore. Je n'ai pas oublié non plus de parler des *maximis* & des *minimis* de différentes eſpeces qu'il ne faut pas confondre les uns avec les autres, théorie dont je ne crois pas qu'on ait encore fait mention dans aucun ouvrage François. Après avoir parlé des *maximis* & des *minimis*, je viens aux rayons oſculateurs & aux developpées, ſoit que les ordonnées partent d'un point ou qu'elles ſoient parallèles : je traite enſuite la théorie des cauſtiques par refléxion & par réfraction, celle des points d'inflexion & de rebrouſſement ſoit de la premiere, ſoit

de la seconde espèce ; je démontre que dans les points singuliers les courbures des courbes ne sont pas circulaires ou, ce qui revient au même, que, lorsqu'on trouve le rayon osculateur égal à zéro ou infini, la valeur de l'abscisse & de l'ordonnée étant supposée finie, il n'y a aucun cercle ni infiniment grand ni infiniment petit, qui ait la même courbure que la courbe au point dont nous parlons, ce qui est contraire à la doctrine commune des Géomètres. Je viens ensuite aux applications du Calcul Différentiel à l'Algebre ; & je fais voir que la formule du Binome de Newton que j'avois déja donnée dans mon Algebre, en supposant que l'exposant est un nombre entier ou fractionnaire positif ou négatif, a encore lieu lorsque cet exposant est un nombre sourd ou irrationel tel que $\sqrt{5}$, par exemple ; j'apprends à trouver les limites des équations & leurs racines approchées, quand on ne peut les avoir exactement : je fais voir que lorsque toutes les racines d'une équation sont réelles, il y a toujours autant de racines positives qu'il y a de changemens de signes & autant de racines négatives qu'il y a de répétitions du même signe d'un terme à l'autre. Je n'oublie pas de

parler des moyens de connoître si une équation a des racines imaginaires, & je développe une méthode par le moyen de laquelle, étant donnée une équation qui contient des racines multiples, on peut trouver d'autres équations plus simples dont l'une renferme celles qui sont contenues une fois dans la proposée, l'autre celles qui sont contenues deux fois seulement, l'autre celles qui sont contenues trois fois seulement, & ainsi de suite. Je viens ensuite aux usages du Calcul Différentiel dans les séries, j'enseigne à élever une série à une puissance quelconque, à multiplier une série par une autre, à réduire une fraction en série, &c.

Comme il est très-important de donner aux Commençants des notions claires sur la nature du Calcul Différentiel, je développe mes recherches métaphysiques sur la nature des différentielles, & je fais voir que les démonstrations du Calcul Différentiel sont rigoureuses; de maniere qu'on ne néglige aucune quantité, grande ou petite: enfin je termine cette premiere section par le Calcul des différences finies, (qui n'est autre chose qu'un Calcul Différentiel dans lequel les différentielles deviennent des grandeurs finies) dont je fais

voir l'usage dans la doctrine des séries. Tel est le troisieme volume de ce Cours de Mathématiques.

Dans le quatrieme, après avoir rappellé quelques principes de Calcul Intégral dont j'avois déja parlé dans la premiere section, j'enseigne à quarrer les courbes, tant celles dont les ordonnées sont paralleles que celles dont les points sont rapportés à un foyer. La quadrature des spirales demande des attentions sans lesquelles il est facile de se tromper; car si la spirale d'Archimede, par exemple, contient deux spires, l'intégrale qu'on trouve renferme la surface de la premiere spire, plus celle de la seconde, tandis qu'on suppose communément que cette intégrale ne renferme alors que la surface comprise entre le foyer & la seconde spire. Après avoir traité des quadratures, je viens aux rectifications des courbes, & je donne une formule qui contient toutes les paraboles rectifiables; elle ne s'accorde pas avec celle d'un Géometre moderne dont les Ouvrages sont entre les mains de tout le monde, ce qui vient de ce que ce Mathématicien, en changeant le signe de l'exposant de la variable sous le signe radical, lui a donné hors de ce radical un exposant qu'elle ne doit point avoir, & cette mé-

prise l'a conduit à une formule fausse.

Après avoir parlé de la rectification des courbes, l'ordre demande qu'on traite de la cubature des solides & de leur surface; c'est ce que j'ai fait avec toute la clarté qui m'a été possible. Venant ensuite à la théorie du centre de gravité des solides, je l'ai développée avec d'autant plus de plaisir qu'elle est d'un grand usage dans la méchanique. Je n'ai pas oublié de parler de la fameuse regle de Guldin & de son usage dans le Calcul Intégral. Passant aussi-tôt après à la méthode inverse des tangentes, j'ai résolu un grand nombre de beaux problêmes, afin d'en faire sentir les avantages, & de mettre les Commençans en état d'en faire l'application dans les différens cas.

Dans la premiere partie de ce Cours, j'avois déja donné quelques notions sur la théorie des courbes à double courbure; reprenant cette matiere, je fais l'application du Calcul Différentiel & Intégral à ces courbes, en suivant la route que le célèbre Clairaut nous a tracée dans ses recherches sur ces sortes de lignes. J'enseigne donc à trouver leurs sous-tangentes & leurs sous-normales, à les rectifier, &c. telle est la seconde section de la seconde

partie de ce Cours de Mathématiques.

La troisieme section est si vaste que j'ai crû devoir la diviser en deux parties : dans la premiere je parle d'abord de la maniere d'intégrer les formules rationnelles & je fais voir par plusieurs exemples, qu'on peut souvent intégrer des formules irrationnelles, en les rendant rationnelles. L'analyse de Diophante que j'ai traitée assez au long dans l'Algebre, est très-utile dans ces sortes de recherches.

Je parle ensuite des formules qu'on peut intégrer par les séries, par les quadratures ou les rectifications des courbes ; de la maniere de ramener les différentielles à des formules plus simples, & de celles qu'on integre par le cercle. Je fais voir que toutes les imaginaires se réduisent à la forme $M + N\sqrt{(-1)}$ (*), je n'oublie pas de parler de l'intégration des formules logarithmiques, de celles qui renferment des sinus &

(*) Segner a démontré depuis long-tems que toutes les imaginaires qu'on peut rencontrer dans la résolution des équations algébriques peuvent se réduire à une forme semblable. Mais nous faisons voir que les quantités même dont les exposants sont imaginaires, peuvent s'exprimer par la formule dont on vient de parler.

des cosinus, soit circulaires soit hyperboliques, des fractions rationnelles, des différentielles dont l'intégrale dépend de la rectification de l'ellypse ou de l'hyperbole, séparément ou ensemble. Je passe ensuite à l'intégration des formules différentielles de tous les ordres, lorsqu'elles ne contiennent qu'une variable, ou du moins, lorsque de deux différentielles l'une est constante, & à celles qui renferment des signes d'intégration. Venant aussi-tôt après aux différentielles à plusieurs variables, je donne différentes méthodes pour les intégrer. Je développe les méthodes de M. Newton d'intégrer par les séries, celles de M. Fontaine, & je donne les équations de condition nécessaires pour qu'une formule ou une équation différentielle soit susceptible d'une, de deux, &c. intégrations dans l'état où elle est. Après avoir parlé fort au long des meilleures méthodes d'intégrer les équations différentielles de tous les ordres, soit à une, soit à plusieurs variables, j'enseigne dans la seconde partie de la même section à ramener l'intégration des équations différentielles du premier ordre & à trois variables à celle d'une équation à deux variables, à trouver les fonctions de deux ou de plusieurs variables

par la relation des différentielles d'un ordre quelconque ; je reprends ensuite la recherche des facteurs qui peuvent rendre les équations intégrables : je donne une méthode par le moyen de laquelle on peut souvent trouver l'intégrale complette & finie d'une équation différentielle d'un ordre quelconque par une seule intégration. Je parle après cela du fameux problême des trajectoires orthogonales & des usages du Calcul Intégral pour trouver la nature des courbes par quelque propriété donnée. Enfin je termine cette section par le beau calcul des variations & ses applications à la Géométrie & à la Méchanique.

Dans la quatrieme section je fais voir l'usage de l'analyse finie, du Calcul Différentiel & du Calcul Intégral, pour la solution des problêmes Physico-Mathématiques. Je les ai choisis capables de donner aux Commençans le desir d'approfondir la science qui nous a procuré de si belles connoissances. Comme je ne donne pas ici un traité de méchanique, j'ai placé les problêmes qui regardent cette partie des Mathématiques presque dans l'ordre qu'ils se sont présentés à mon esprit, ayant supposé que mes lecteurs étoient au moins

inſtruits des premiers élémens de méchanique.

Il ſeroit trop long de faire le détail de tout ce que cette ſection contient, je me contenterai de parler en peu de mots de ce qui s'y trouve de plus intéreſſant. J'y traite des loix du mouvement des corps élaſtiques & non élaſtiques, déduites du fameux *principe de la moindre action*. Le même principe étant appliqué au mouvement de la lumiere fait voir que l'angle de réflexion eſt toujours égal à celui d'incidence, & que les ſinus des angles de réfraction & d'incidence ſont toujours en raiſon conſtante. Etant donné l'angle d'élévation d'un mortier avec la force de la poudre, je détermine la plus grande hauteur à laquelle une bombe puiſſe parvenir, n'ayant pas égard à la réſiſtance de l'air; j'apprends à trouver l'angle que doivent faire les portes d'une écluſe pour qu'elle réſiſte le plus qu'il eſt poſſible à l'action de l'eau; j'enſeigne à conſtruire une ancre de maniere qu'elle s'enfonce dans le fond de la mer le plus qu'il eſt poſſible. Je parle aſſez au long du centre de percuſſion & d'oſcillation, théorie ſur laquelle pluſieurs Auteurs ſe ſont trompés. Je traite auſſi du mouvement de rotation & de pro-

jection, & à cette occasion je détermine à quelle distance du centre de la Terre a dû passer l'impulsion primitive, pour qu'il en ait résulté le rapport du mouvement diurne & annuel qui a lieu dans la nature. Je parle du moment d'inertie, des effets de l'attraction, du tems qu'un corps situé à la distance de la Lune mettroit à tomber sur la Terre, de la courbure des cordes, de la ligne de la plus vîte descente, de celle le long de laquelle un corps s'approcheroit également de l'horison en tems égaux, de la figure de la Terre, du mouvement des pilons dans les moulins à poudre, des effets des machines, du frottement, des corps qui se meuvent dans les fluides, du solide de la moindre résistance, de l'action & du mouvement des fluides, des mouvemens qui dépendent d'une cause accélératrice, des cordes vibrantes, des pompes aspirantes, & de plusieurs autres choses dont le détail nous meneroit trop loin. En un mot on trouvera dans cette section des choses très-intéressantes sur les effets des machines, soit accélerantes soit uniformes, sur les moulins, la manœuvre des vaisseaux, &c. l'hydrostatique & l'hydraulique. Ayant parcouru les recherches sur les mo-

difications de l'atmoſphère du ſavant M. de Luc (*), j'ai crû faire plaiſir à mes Lecteurs, en développant en peu de mots la méthode de ce grand Phyſicien pour meſurer la hauteur des lieux par le baromètre. J'ai dit auſſi quelque choſe de la Muſique, & de l'Optique : enfin en faveur de ceux qui aiment la Phyſique, je me ſuis aſſez étendu ſur les forces phyſiques qui font mouvoir les corps ; j'ai développé la théorie du flux & reflux de la mer ; celle des tubes capillaires, que le célèbre M. de Lalande a traitée fort au long & d'une maniere très-ingénieuſe dans un ſavant Mémoire qui a paru en 1770. De tous les Phyſiciens attractionnaires c'eſt celui qui explique le plus clairement les effets de l'attraction dans le tube capillaire.

Mais qu'on ne s'y trompe pas ; les ſolutions des problêmes Phyſico-Mathématiques ſont ſouvent appuyées ſur des hypothèſes précaires qui n'ont pas lieu dans la nature. Celui qui voudra déterminer, par exemple, la courbe que ſuit un corps lancé en l'air, ſera obligé de ſuppoſer que la réſiſtance de ce fluide ſuit une certaine

(*) Cet excellent Ouvrage en 2 volumes *in*-4°. a été imprimé à Genève en 1772.

loi. Mais par quel moyen s'assurera-t-il de l'existence de cette loi ? par l'expérience, direz-vous ; fort bien : mais malgré tant d'expériences, nous n'avons encore rien de certain sur cette matiere. D'autre côté l'expérience pourra peut-être lui faire connoître cette loi dans le cas où le mobile n'aura qu'une vîtesse médiocre ; mais si le fluide ne peut suivre le mobile & occuper aussi-tôt l'espace que celui-ci abandonne, la résistance ne sera-t-elle pas différente ? ce sont les raisons pour lesquelles je n'ai rapporté aucune des solutions que différens Géomètres ont données de ce fameux problême ; car il n'y en a aucune que je voulusse garantir. Souvent un Auteur s'imagine avoir prouvé que la solution d'un problême est juste parce qu'elle s'accorde avec l'expérience ; cependant il peut se faire que les erreurs se compensent & qu'on arrive à la vérité par une méthode fausse.

Il y en a d'autres qui font des suppositions de calcul, en regardant, par exemple, comme nulles des quantités qui les embarrassent. Messieurs Clairaut & Maier qui se sont fait tous les deux un nom immortel par leurs Tables Lunaires, ont employé (ainsi que l'a très-bien remar-

qué M. Euler dans sa nouvelle Théorie de la Lune) des équations qu'ils ont, pour ainsi dire, trouvées en devinant & déduites de l'observation, au lieu qu'il falloit les déduire de la théorie de la Lune. D'autres établissent de beaux calculs sur des principes sans solidité, semblables à un Architecte ridicule qui éleveroit un superbe palais sur des fondemens sans consistance. En lisant les Ouvrages des Mathématiciens modernes, on s'apperçoit qu'il y en a plusieurs qui manquent de Physique, de Logique & surtout de Métaphysique, & que c'est principalement par le défaut de cette derniere science que des gens, habiles d'ailleurs, nous ont donné tant de chimeres comme des vérités démontrées. On ne peut donc trop exhorter les jeunes Géomètres, ceux du moins qui se proposent de faire certains progrès, & qui veulent approfondir les Mathématiques, à s'attacher à la Logique, à la Physique, & surtout à la Métaphysique. Mais qu'on y prenne bien garde, quand j'exhorte les jeunes gens à méditer les vérités métaphysiques, je n'entends pas parler de ces chimeres sublimes, de ces êtres sans consistance & sans réalité, de ces quiddités, entités & autres

rêveries ridicules sur lesquelles les anciens scholastiques disputoient à perte de vue, dans un jargon absurde & presque inintelligible : la vraie métaphysique recherche la nature des êtres, soit matériels soit spirituels, celle de l'espace & du tems. Notre Métaphysique renferme deux Dissertations, l'une sur le tems, l'autre sur l'espace, dans lesquelles on trouve des idées nouvelles sur ces matieres sublimes, qui sont, si l'on peut parler ainsi, des matériaux dont les Géomètres font si souvent usage dans les sciences Physico-Mathématiques, mais dont ils n'ont la plupart que des notions bien superficielles & souvent fausses. La vraie Métaphysique apprend à approfondir les principes & à les réduire à leur juste valeur. Un Géomètre Métaphysicien ne dira pas que la ligne est composée de points, la surface de lignes & le solide de surfaces. Un Mathématicien qui n'aura lu que des livres de géométrie, pourra tomber dans cette erreur grossiere, comme l'expérience l'a déja appris.

Je souhaiterois que les jeunes gens qui liront ce Cours de Mathématiques, eussent déja parcouru notre Logique & notre Mé-

taphysique (*), (je ne parle pas de la Physique que je me propose de publier bientôt), ils pourroient peut-être alors retirer plus de profit de l'étude d'un ouvrage que j'ai fait dans la vue d'être utile à mes Concitoyens. C'est ce noble motif qui m'a soutenu dans une si longue & si pénible carriere, qui m'a fait surmonter tant d'obstacles, parcourir tant de livres & entreprendre de longs travaux pour mettre à la portée des génies même ordinaires tout ce que les Mathématiques ont de plus sublime & de plus élevé.

Je ne demande pas que le Lecteur soit instruit des élémens de Géométrie & d'Arithmétique, comme doit l'être un homme qui voudroit étudier les Institutions Analytiques de Ricati & de Saladini; je ne renvoye jamais aux livres des autres, comme certains Auteurs qui se mettent peu en peine si celui qui les lit, peut ou ne peut pas se procurer les ouvrages dans lesquels se trouvent les

(*) Le desir d'apprendre & de se faire un nom fait quelquefois faire aux commençants des efforts d'étude nuisibles à leur santé; la lecture du chapitre des maladies des Gens de Lettres qu'ils trouveront dans notre Métaphysique, est très-propre à leur donner de la modération & de la prudence.

démonstrations

démonſtrations qu'ils n'ont pas jugé à propos de rappoter (*).

La plupart des traités de Calcul Différentiel & Intégral que nous connoiſſons, ſont trop élémentaires & peu propres à faire connoître ce qu'il y a de plus difficile en cette matiere ; quelques-uns ſont profonds & renferment de fort belles découvertes en ce genre, mais leurs illuſtres Auteurs, occupés de la gloire de l'invention, ſe ſont mis peu en peine de l'avantage de ceux qui aſpirent à les comprendre. Nous avouons avec reconnoiſſance avoir profité de ce qu'ont écrit ſur cette matiere les Mathématiciens les plus fameux ; nous ne pouvons cependant pas nous diſſimuler que pluſieurs choſes nous appartiennent en propre. D'ailleurs nous nous ſommes preſque toujours écartés de la méthode de démontrer des Inventeurs, tâchant de ſuivre nos principes & d'y ramener ce qui avoit été découvert par les autres. C'eſt pour cela, comme auſſi pour éviter les altercations, que nous n'avons

(*) Mes *Inſtitutions Mathématiques* (qu'on trouve à Paris, chez *Valade*, Libraire, rue Saint-Jacques), & ma *Métaphyſique*, ſont les ſeuls Livres auxquels j'ai quelquefois renvoyé le Lecteur.

pas toujours cité les Auteurs des découvertes, qui sont souvent très douteux. Nous avons cru encore devoir varier les méthodes pour plus grande facilité, parce qu'il est difficile d'en assigner une qui soit généralement la plus commode. Au reste, comme nous recherchons uniquement l'utilité des Commençans, nous laissons à chacun la liberté de revendiquer ce qu'il croira lui appartenir ; ne disputant pas même les choses sur lesquelles nous sommes sûrs d'avoir une propriété exclusive, & cédant à quiconque voudra tout ce qu'il jugera à propos de répéter; pourvu qu'on nous accorde la gloire d'avoir été utiles.

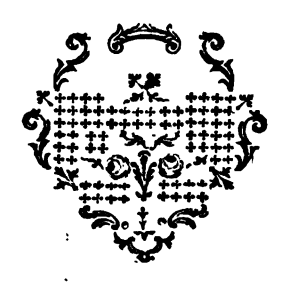
Un conseil bien important que l'on peut donner à ceux qui étudient les Mathématiques, c'est de lire peu & de penser beaucoup, d'essayer souvent leurs forces en cherchant eux-mêmes les démonstrations, en tâchant de développer les choses qu'ils ont lues, & d'en faire des applications; c'est ainsi qu'on peut acquérir la facilité de découvrir & l'esprit d'invention. Les détails dans lesquels je suis entré quelquefois, sont pour ceux qui n'ont pas le tems nécessaire pour suivre la méthode dont je viens de parler.

A l'égard de l'utilité des Mathémati-

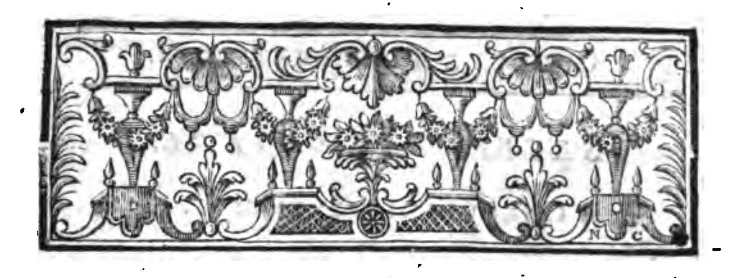
ques, je ne crois pas qu'un homme un peu instruit & exempt de préjugés puisse la révoquer en doute. Mais cette étude a encore un avantage auquel on ne fait pas assez d'attention : les merveilles qu'on découvre en étudiant cette science, captivent l'ame, l'occupent d'une maniere délicieuse & exempte de danger ; elles élevent l'esprit, procurent une satisfaction douce, qui dégoûte des passions grossieres ; elles éloignent les desirs frivoles & procurent des plaisirs qui renaissent sans cesse. Pythagore ne recevoit point de disciples qui n'eussent étudié les Mathématiques ; on lisoit sur sa porte : *nul ici qui ne soit Géomètre* ; tant il étoit persuadé que les Mathématiques contribuent puissamment au développement de l'esprit & de la raison ; & l'on peut dire qu'elles sont, pour ainsi dire, le fondement de la Physique, dans laquelle on ne fera jamais de grands progrès sans le secours de cette science.

Si nous pouvons mesurer la distance du Soleil à la Terre, à la Lune, à Jupiter, Mars & Saturne, calculer les mouvemens des Planètes & des Comètes, & prédire les éclipses du Soleil & de la Lune ; si nos Navigateurs font aujourd'hui avec tant de facilité le voyage des Indes Orientales &

Occidentales; si nous pouvons nous procurer si facilement les productions & les richesses de l'Afrique, de l'Asie & de l'Amérique: si nous savons mieux attaquer & mieux fortifier les places que les anciens; si nos batailles sont plus savantes, mais moins meúrtrieres que celles des Romains & des Grecs; si nous pouvons calculer & régler les mouvemens & les évolutions des armées avec tant de justesse, c'est aux Mathématiques que nous devons tous ces avantages. Mais il seroit inutile d'entrer dans un plus grand détail, puisque personne ne conteste l'utilité de cette belle science.



COURS



COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

CALCUL INFINITÉSIMAL.

Je divise le *calcul infinitésimal* en trois parties; *calcul différentiel*, *calcul intégral* & *calcul des variations*. Cette seconde partie de notre Cours de Mathématiques contiendra quatre Sections. Dans la premiere, je parlerai du calcul différentiel; dans la seconde & la troisiéme, du calcul intégral & de celui des variations; dans la quatriéme enfin, je ferai l'application du calcul différentiel & du calcul intégral aux sciences Physico-Mathématiques.



SECTION PREMIERE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

1. SI on conçoit qu'une quantité x augmente ou diminue d'une quantité infiniment petite dx, de ſorte qu'elle devienne $x \pm dx$, la quantité dx s'appelle la *différentielle* de x; dx ne marque pas ici le produit de la quantité d par la quantité x, mais ſeulement la différentielle de x. Les quantités conſtantes ou qui ne varient point, ſont ordinairement déſignées par les premieres lettres de l'alphabeth a, b, c, &c. Les variables par les dernieres x, y, z. Puiſque les quantités conſtantes n'ont point de différentielles, leur différentielle eſt $=0$.

J'entends par *calcul différentiel*, la maniere de trouver les différentielles des quantités variables & les rapports de ces différentielles. Pour avoir la différentielle de x, on écrira dx, ſi x va en croiſſant, ou $-dx$, ſi x diminue. Lorſque les Géomètres ne donnent pas le ſigne $-$ à la différentielle, ils ſuppoſent que la variable va en augmentant, à moins qu'elle ne ſoit négative; car, par exemple, la différentielle de $-x$ eſt $=-dx$. En effet, puiſque x varie d'une quantité infiniment petite dx, x devient $x+dx$, & $-x$ devient $-x-dx$. Si de cette derniere quantité on retranche $-x$, l'on a $-x-dx+x=-dx$.

La différentielle de $a+x+y$ eſt $=dx+dy$; car la différentielle de a eſt $=0$; la différentielle de ax eſt adx. En effet, puiſque x devient $x+dx$, ax deviendra $ax+adx$. De cette quantité ôtant la quantité donnée ax, l'on aura $ax+adx-$

$ax = adx$, différence ou différentielle cherchée. *Donc pour trouver la différentielle d'un produit, dont un des facteurs eſt conſtant & l'autre variable, on multipliera le facteur conſtant par la différentielle du facteur variable.*

La différentielle du produit xy eſt $= ydx + xdy$. En effet, lorſque x devient $x + dx$, y devient $y + dy$ & xy devient $(x + dx) \times (y + dy) = xy + ydx + xdy + dxdy$; d'où retranchant la quantité donnée xy, il reſte $ydx + xdy + dxdy$. Or $dxdy$ produit d'un infiniment petit dx, par un autre infiniment petit dy, eſt un infiniment petit du ſecond ordre qui diſparoît (voyez ce que nous avons dit ſur l'infini dans la premiere partie) devant les infiniment petits ydx, xdy du premier ordre. Donc la différentielle cherchée eſt $= ydx + xdy$; on trouveroit de même que la différentielle de $xy \pm a$ eſt $= ydx + xdy$, parce que la différentielle de a eſt $= 0$. *Donc la différentielle du produit de deux variables, eſt égale à la ſomme du produit de chacune des variables par la différentielle de l'autre variable.*

La différentielle du produit xzu de trois variables, eſt $= zudx + xudz + xzdu$; car, en ſuppoſant $zu = y$, nous aurions (ſelon ce que nous venons de dire) la différentielle de $zu = udz + zdu = dy$ & parce que $zu = y$, l'on a $xzu = xy$. Or, la différentielle de xy eſt $= ydx + xdy$. Donc, en ſubſtituant la valeur de y & de dy, l'on a la différentielle de xzu ou de $xy = zudx + xudz + xzdu$. *Et en général on trouvera la différentielle du produit de pluſieurs variables, en prenant la ſomme des produits*

de la différentielle de chaque variable, par les autres variables.

COROLLAIRE. Donc la différentielle de $xyzu$ est $= xyzdu + yzudx + xzudy + xyudz$.

2. En général, pour avoir la différentielle d'une quantité quelconque p, on substituera à la place des variables x, y, &c. qui composent cette quantité, les quantités $x + dx$, $y + dy$, &c. & l'on aura une autre quantité que nous appellerons P; on ôtera p de P pour avoir $P - p$; on effacera dans cette derniere quantité tous les termes qui s'évanouissent, par rapport aux autres termes; le reste sera la différentielle cherchée dp délivrée de ses termes inutiles.

Si $p = xy$, en substituant $x + dx$ au lieu de x, $y + dy$ au lieu de y, l'on aura $P = xy + ydx + xdy + dxdy$; & $P - p$ sera $xy + ydx + xdy + dxdy - xy = ydx + xdy$, en effaçant les termes qui se détruisent, & négligeant l'infiniment petit du second ordre $dxdy$; mais si y diminuoit tandis que x est supposé augmenter, la différentielle de y seroit négative & égale à $- dy$. Dans ce cas, on auroit $P - p = ydx - xdy$.

3. J'entends par *calcul intégral* l'art de trouver l'expression à laquelle appartient une différentielle proposée. Cette expression s'appelle *l'intégrale* de cette différentielle. Ainsi la différentielle $ydx + xdy$ a pour l'intégrale xy, ou $xy \pm a$; car en différenciant, soit xy, soit $xy \pm a$, l'on a également $ydx + xdy$. On peut voir par là qu'on doit ajouter une constante (que nous désignerons souvent dans la suite par C) à une

intégrale quelconque. Nous dirons auſſi dans la ſuite de cet Ouvrage comment on peut déterminer cette conſtante. Au reſte, cette conſtante eſt ſouvent 0; nous ne l'ajouterons cependant pas toujours pour abréger.

Il eſt aiſé de voir que le calcul intégral eſt l'inverſe du calcul différentiel; ainſi il faut faire beaucoup d'attention aux procédés de celui-ci, pour pouvoir réuſſir dans le premier.

4. La différentielle de x^m ſe trouvera (2), en ſubſtituant $x + dx$ à la place de x, pour avoir $(x+dx)^m = x^m + \frac{m}{1}x^{m-1}dx + \frac{m(m-1)}{1.2} \times x^{m-2}dx^2$ &c. (par le binome de Newton, voyez la premiere Partie) $= x^m + mx^{m-1}dx$, en négligeant les termes ſuivans, qui étant multipliés par des infiniment petits dx^2, dx^3, &c. des ordres ſupérieurs, diſparoiſſent devant le ſecond terme. Donc en retranchant la quantité donnée x^m, l'on a $mx^{m-1}dx$ pour la différentielle cherchée.

COROLLAIRE I. *Donc la différentielle d'une puiſſance x^m ſe trouve en multipliant par l'expoſant de la puiſſance, & par la différentielle de la quantité variable & diminuant cet expoſant d'une unité.*

Donc la différentielle de $\overline{a+y}^m$ ou de $(a+y)^m$ ſera $= m(a+y)^{m-1}dy$. Car ſoit $a+y = x$, on aura $dy = dx$, $(a+y)^m = x^m$, $d(a+y)^m$ (*) $= d(x^m) = mx^{m-1}dx = m(a+y)^{m-1}dy$, en ſubſtituant les valeurs de dx, & de x.

(*) L'expreſſion $d.(a+y)^m$ ou $d(a+y)^m$ indique la différentielle de $(a+y)^m$.

COROLLAIRE II. Donc l'intégrale de $mx^{m-1}dx$ sera $\frac{mx^{m-1+1}dx}{(m-1+1)dx} = \frac{mx^m dx}{mdx} = x^m$.

DONC RÈGLE GÉNÉRALE : *l'intégrale d'une différentielle monome, qui ne contient qu'une variable, se trouve, en augmentant d'une unité l'exposant de la puissance, divisant par cet exposant ainsi augmenté & par la différentielle de la variable.*

Une quantité affectée d'un radical ou d'un signe sera dite être sous le signe; ainsi dans $a\sqrt{x} = ax^{\frac{1}{2}}$, la qantité x est sous le signe $\sqrt{}$ ou $\frac{1}{2}$, mais la quantité a est hors du signe.

L'intégrale de la différentielle $y^m dy$ sera $\frac{y^{m+1}}{m+1}$. En effet, en différenciant cette quantité, on aura la différentielle proposée. L'intégrale de $(a+y)^m dy$ sera $\frac{(a+y)^{m+1}}{m+1}$. En effet, supposons $a+y=x$, on aura $(a+y)^m = x^m$, $dy = dx$ & $(a+y)^m dy = x^m dx$, dont l'intégrale est $= \frac{x^{m+1}}{m+1}$ (par la régle générale) $= \frac{(a+y)^{m+1}}{m+1}$. L'intégrale de $(a+by)^m dy$ est $\frac{(a+by)^{m+1}}{b(m+1)}$. Car soit $a+by = x$, on aura $bdy = dx$, $\frac{dx}{b} = dy$ & en substituant, il vient $(a+by)^m dy = x^m \frac{dx}{b} = \frac{1}{b}x^m dx$, dont l'intégrale est $\frac{1}{b} \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} =$

$\frac{1}{b} \cdot \frac{(a+by)^{m+1}}{m+1}$; l'intégrale de $(a+\frac{1}{f}y)^m dy$ sera (en supposant $\frac{1}{f} = b$) $= \frac{1.(a+by)^{m+1}}{b(m+1)}$ $= \frac{f(a+\frac{1}{f}y)^{m+1}}{m+1}$; car $\frac{1}{f} = b$ & $\frac{1}{b} = \frac{f}{1} = f$.

Pour avoir la différentielle de $\sqrt{(a+y)}$, on supposera $\sqrt{(a+y)} = (a+y)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$, en faisant $a+y=x$, & l'on aura la différentielle de $x^{\frac{1}{2}} = m\, x^m\, dx$ (en faisant $m = \frac{1}{2}$) $= \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1}\, dx = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{dy}{2\sqrt{a+y}}$

REMARQUE. Nous désignerons l'intégrale par la lettre S; de sorte que $S x^{\frac{1}{2}} dx$ désignera l'intégrale de $x^{\frac{1}{2}} dx$ (*). Or, en supposant $\frac{1}{2} = m$, l'on a $S x^{\frac{1}{2}} dx = S x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$.

En général $S x^m dx$ est $= \frac{x^{m+1}}{m+1}$, excepté le cas où $m = -1$; mais nous parlerons de ce cas dans la suite.

COROLLAIRE. Il suit de ce que nous venons de

(*) On peut concevoir l'intégrale d'une différentielle, comme la somme des élémens infiniment petits d'où résulte l'intégrale.

dire que l'on peut toujours trouver l'intégrale d'une quantité monome ou binome, dont la quantité, hors du ſigne, eſt la différentielle de la quantité ſous le ſigne, cette différentielle étant ſuppoſée multipliée ou diviſée par une conſtante, excepté le cas où l'on auroit un expoſant $= -1$.

5. Nous avons dit ci-deſſus que la différentielle de ax étoit adx. Donc S adx eſt $= ax$. Nous avons vu auſſi (1) que $d(xy)$ eſt $= y\,dx + x\,dy$ (A); que $d(xzu) = zu\,dx + xu\,dz + xz\,du$ (B). Donc pour avoir l'intégrale des différentielles A & B qui contiennent pluſieurs variables, on ſubſtituera les variables au lieu de leurs différentielles, & chaque terme ſera la différentielle cherchée. *Donc ſi une quantité* (M) $by\,dx + bx\,dy + a\,dz +$ &c. *a une intégrale* $= P$, *on peut la trouver* 1°. *en intégrant le premier terme, comme ſi y étoit conſtant*, 2°. *en intégrant le ſecond terme comme ſi x étoit conſtant, & ainſi de ſuite juſqu'au dernier terme, & en comparant entr'elles toutes les intégrales; car ſi elles ſont les mêmes, l'intégrale du premier terme ſera l'intégrale cherchée. Si elles ſont différentes, on ajoutera à ce qu'elles ont de commun tous les termes qui ſont leur différence & l'on aura l'intégrale P.* Suppoſant que la différentielle M n'a que trois termes, l'intégrale du premier terme, auſſi bien que celle du ſecond, ſera bxy; mais celle du troiſiéme eſt az; l'ajoutant à bxy, j'aurai l'intégrale P cherchée $= bxy + az$. En effet, en différenciant cette quantité, l'on aura la différentielle M.

6. Pour avoir la différentielle d'une fraction $\frac{x}{y}$, je fais $\frac{x}{y} = z$: donc $d\left(\frac{x}{y}\right) = dz$. Or,

l'équation $\frac{x}{y} = z$, donne $x = yz$, $dx = ydz + zdy$, $dx - zdy = ydz$, $\frac{dx - zdy}{y} = dz$, $\frac{ydx}{y^2} - \frac{xdy}{yy} = \frac{ydx - xdy}{yy} = dz$, en substituant la valeur de z. *Ainsi la différentielle d'une fraction quelconque, est égale au produit de la différentielle du numérateur par le dénominateur, moins le produit de la différence du dénominateur par le numérateur, le tout divisé par le quarré du dénominateur.* Donc S. $\frac{ydx - xdy}{y^2}$ est $= \frac{x}{y}$; la différentielle de $\frac{a}{x}$ est $= - \frac{adx}{xx}$, parce que $da = 0$. Donc S. $- \frac{adx}{x^2} = \frac{a}{x}$.

REMARQUE. Lorsqu'une différentielle bdx se trouve multipliée par une constante, on peut intégrer comme si la constante n'y étoit pas; mais on doit multiplier ensuite l'intégrale par la constante. Ainsi, en intégrant dx, j'ai x, & multipliant par b, il vient bx; de sorte que S. bdx est $= b$.S$dx = bx$.

Lorsqu'on pourra ramener une différentielle à la forme $x^m dx$, comme cela se peut, par exemple, dans la quantité $bdy \sqrt{(a+y)} = dy \times b(a+y)^{\frac{1}{2}} = dx \times bx^m$, en supposant $a + y = x$, & par conséquent $dy = dx$ & $m = \frac{1}{2}$, on intégrera facilement, puisque S. $x^m dx$ est $= \frac{x^{m+1}}{m+1} = \frac{(a+y)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}(a+y)^{\frac{3}{2}}$. Et

en multipliant cette derniere quantité par b, on aura $\frac{2}{3} b (a+y)^{\frac{3}{2}}$, intégrale cherchée.

Lorsque la substitution ne pourra pas réussir; & que la différentielle ne sera pas contenue sous quelqu'une des formules ci-dessus, on pourra intégrer par les series. Soit par exemple, la quantité $dy \sqrt{(a+y^2)}$, cette quantité ne pouvant se rapporter à aucune des formules ci-dessus, je réduis $\sqrt{(a+y^2)} = (a+y^2)^{\frac{1}{2}}$ en une serie par le binome de Newton, ce qui peut se faire facilement, en substituant y^2 à la place de b & $\frac{1}{2}$ à la place de m dans la formule $\overline{a+b}^m = a^m \left(a + \frac{m}{1} \cdot \frac{b}{a} + \frac{m(m-1)}{2} \times \frac{b^2}{a^2} + \text{\&c.}\right) = a^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}\frac{y^2}{a} - \frac{1}{8}\frac{y^4}{a^2} \text{ \&c.}\right)$ Multipliant tous les termes par dy, on trouve (en négligeant le multiplicateur $a^{\frac{1}{2}}$) $dy + \frac{1 \cdot y^2 dy}{2a} - \frac{1 \cdot y^4 dy}{8a^2}$ &c. prenant l'intégrale de chaque terme & multipliant la somme par $a^{\frac{1}{2}}$, il vient $a^{\frac{1}{2}} \left(y + \frac{1}{6a} yyy - \frac{1}{40a^2} y^5 \text{ \&c.}\right)$ Cette serie sera d'autant plus convergente, que y sera plus petit par rapport à a.

Des différences des ordres supérieurs & de leur intégration.

7. dx étant la différence ou la différentielle de x, son quarré sera désigné par dx^2, son cube par dx^3, &c. Mais rien n'empêche de concevoir la différentielle de la quantité dx: elle sera désignée par $d.dx$, ou par d^2x; c'est la seconde différence de x. La troisiéme différence de x, ou la différentielle de ddx, s'exprime ainsi $dddx$, ou d^3x; & en général la différentielle de l'ordre m de la quantité x, s'exprime par $d^m x$. Quoique dx^2 & ddx soient deux infiniment petits du second ordre, néanmoins ces quantités peuvent avoir entr'elles tels rapports que l'on voudra (voyez ce qu'on a dit sur l'infini dans la premiere Partie de cet Ouvrage); ainsi il ne faut pas les confondre l'un avec l'autre. La premiere différentielle de x^m est (4) $m. x^{m-1} dx$. Pour avoir la seconde différentielle, on considérera d'abord un des facteurs variables x^{m-1}, par exemple, comme variable, & le facteur dx comme constant; l'on traitera ensuite dx comme variable & x^{m-1} comme constant. Ainsi l'on aura $m(m-1) \times x^{m-2} dx^2 + m x^{m-1} ddx$ (B). Si on suppose dx constant, ce qu'on est bien le maître de faire, on aura $ddx = 0$; & la seconde différentielle de x^m sera $m(m-1)\ x^{m-2} \times dx^2$, & l'on aura S. $m(m-1)\, x^{m-2}\, dx^2 = m\, x^{m-1}\, dx$. La troisiéme différence de x^m se trouvera en traitant successivement dans la quantité B chaque facteur variable comme variable & les autres comme constans; ce qui donnera $m.(m-1) \times$

$(m-2)x^{m-3} \times dx^3 + m(m-1)x^{m-2} \times 2dx\,d^2x + m(m-1)x^{m-2}ddx\,dx + mx^{m-1}d^3x$ (la différentielle de dx^2 eſt $= 2\,dx\,ddx$, par la même raiſon que celle de x^2 eſt $2\,xdx$, que celle de y^2 eſt $2\,y\,dy$, dont l'intégrale eſt la quantité B. Si dans la derniere différentielle on ſuppoſe $dddx = 0$, c'eſt-à-dire ſi l'on ſuppoſe la différence du ſecond ordre conſtante, on effacera le terme qui eſt multiplié par d^3x, le reſte ſera la différentielle troiſiéme de x^m, en en ſuppoſant ddx conſtant. Il n'eſt pas difficile de voir comment il faudroit s'y prendre pour avoir la différentielle du quatriéme, cinquiéme, &c. ordre de la quantité x^m.

La différentielle du premier ordre de la quantité xy, étant (1) $x\,dy + y\,dx$; la ſeconde différentielle ſera $dx\,dy + x\,ddy + dy\,dx + y\,ddx = 2\,dx\,dy + x\,ddy + y\,ddx = 2\,dx\,dy + x\,ddy$, en ſuppoſant dx conſtant.

En conſidérant dans celle-ci ſucceſſivement dy, x, ddy comme variables, on aura la troiſiéme différence de xy dans la ſuppoſition de dx conſtant. Il eſt évident que S. $(2\,dx\,dy + x\,ddy) = x\,dy + y\,dx$, & que S. $(x\,dy + y\,dx) = xy$. Il eſt aiſé de voir maintenant comment on peut avoir la différentielle ſeconde d'une quantité quelconque. Il n'y a qu'à conſidérer ſucceſſivement dans la différentielle premiere de cette quantité chaque facteur variable comme variable & les autres comme conſtans; & faiſant la même choſe pour la différence ſeconde, on aura la troiſiéme & ainſi de ſuite, en ſe ſouvenant d'égaler à 0 les différentielles des quantités qu'on a conſidérées comme conſtantes. Quant à

l'intégration de ces sortes de quantités, on en parlera plus au long dans la suite de cet Ouvrage. Tels sont les principes les plus généraux du calcul différentiel & du calcul intégral. Faisons quelques applications.

8. PROBLÊME. *Trouver la sous-tangente d'une courbe algébrique, dont les ordonnées sont parallèles.* Soit la courbe A m (fig. 1.) dont on demande la tangente au point m. Ayant mené l'ordonnée Pm (y), son infiniment proche pn & la ligne mR $=$ Pp, parallèlement à l'axe AL, on aura AP $= x$, P$p = m$R $= dx$, nR (ou la différence de l'ordonnée pn à l'ordonnée Pm) $= dy$. la portion mn de la tangente étant infiniment petite, peut être regardée comme se confondant avec la partie correspondante de la courbe à laquelle elle est censée égale. Cela posé, les triangles semblables mnR, mTP donnent nR : mR :: mP : PT, ou $dy : dx :: y :$ PT $= \frac{y\,dx}{dy}$ (B), expression générale des sous-tangentes. Si dans cette formule on substitue la valeur de dx prise de l'équation de la courbe, cette valeur contenant dy, il en résultera une expression de PT délivrée de différences.

9. Soit supposée la courbe Am une parabole ordinaire dont l'équation soit $y^2 = ax$, a étant le paramètre; en différenciant, on a $2y\,dy = a\,dx$, $dx = \frac{2y\,dy}{a}$. Substituant cette valeur de dx, dans la formule B, il vient $\frac{2y^2dy}{a\,dy} = \frac{2y^2}{a} = \frac{2ax}{a} = 2x$, à cause de $y^2 = ax$;

c'est-à-dire, que la sous-tangente de la parabole est double l'abscisse; ce qui s'accorde avec ce que nous avons dit dans les Sections coniques.

10.. Si la courbe est une parabole d'un genre quelconque, dont l'équation soit $a^m x^n = y^{m+n}$ (Sections coniques 92); en différenciant, l'on a $n a^m x^{n-1} dx = (m+n) y^{m+n-1} dy$, $dx = \frac{(m+n) y^{m+n-1} dy}{n a^m x^{n-1}}$. Substituant cette valeur dans la formule B, on trouve $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{m+n}{n} \times \frac{y^{m+n}}{a^m x^{n-1}} = \frac{(m+n)}{n} \cdot \frac{a^m x^n}{a^m x^{n-1}}$ (en mettant la valeur de y^{m+n}) $= \left(\frac{m+n}{n}\right) x$. Si $m = 2$ & $n = 1$, l'on a $PT = 3x$. Si $m = 3$ & $n = 2$, l'on a $PT = \frac{5x}{2}$.

L'équation $a^m x^n = y^{m+n}$ devient $a^m x^{-n} = y^{m-n}$, en supposant n négatif; & dans ce cas, on a $a^m = y^{m-n} x^n$ (voyez la note du n°. 95 des Sections coniques) équation aux hyperboles de tous les genres par rapport aux asymptotes, & la sous-tangente PT (figure 2) devient $\frac{m-n}{-n} = \frac{M}{-n}$, en supposant $m - n = M$. Si $M = 1$ & $n = 1$, comme dans l'hyperbole du premier genre, on aura $PT = -x$, c'est-à-dire, que la sous-tangente sera égale à l'abscisse; mais à cause du signe —, il faut prendre la sous-tangente du côté opposé à l'origine des abscisses. Si $M = 7$ & $n = 2$, l'on aura PT

$= \frac{-7x}{2}$. Si M = 20 & $n = 4$, l'on aura PT = $-5x$. En général, la sous-tangente, dans les hyperboles, est toujours égale à l'abscisse multipliée par le quotient de l'exposant de l'ordonnée, divisé par celui de l'abscisse, en prenant l'exposant de l'abscisse avec le signe —.

Dans les ellipses de tous les genres, l'on a $\frac{a}{p} y^{m+n} = x^n \times (a-x)^m$. Différenciant & multipliant par p, il vient $(m+n)\, a y^{m+n-1} dy = npx^{n-1} \times (a-x)^m dx - mpx^n \times (a-x)^{m-1} dx$, $dx =$

$$\frac{(m+n)\, a y^{m+n-1} dy}{npx^{n-1} \times (a-x)^m - mpx^n \times (a-x)^{m-1}}.$$

Substituant cette valeur de dx, l'on a $\frac{y\,dx}{dy} =$

$$\frac{(m+n)\, a y^{m+n}}{npx^{n-1} (a-x)^m - mpx^n (a^n - x)^{m-1}}.$$

Substituant la valeur de y^{m+n}, & divisant ensuite le numérateur & le dénominateur par $px^{n-1} \times (a-x)^{m-1}$, l'on a (en supposant que la figure 3 puisse représenter ces sortes de courbes)

$$PT = \frac{(m+n)(ax - x^2)}{na - nx - mx}.$$

Comme la quantité p ne se trouve pas dans l'expression de la sous-tangente, il est évident que cette ligne doit être la même, quelle que soit cette quantité. Donc toutes les courbes qui ont des équations qui ne different que par différentes valeurs de la grandeur p, ont des sous-tangentes égales correspondantes à des abscisses égales.

On trouveroit la même expression pour les cer-

cles de tous les genres, dont l'équation est la même que celle des ellipses, en supposant $a = p$ (*). Si

$m = 1$ & $n = 2$, PT sera $= \frac{3ax - 3x^2}{2a - 3x}$; d'où

l'on tire $2\,Aa - 3\,AP : 3x :: a - x : PT$. Si $m = n = 1$, comme dans l'ellipse & le cer-

cle ordinaire, l'on aura $PT = \frac{2ax - 2xx}{a - 2x} =$

$\frac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x}$, & les tangentes m T, n T correspon-

dantes à la même abscisse AP, rencontreront l'axe au même point T (fig. 4).

Dans les hyperboles de tous les genres, l'on

a $\frac{a}{p} y^{m+n} = x^n \times (a + x)^m$, cette équa-

tion ne différant de celle des ellipses que parce que dans le facteur $a + x$, x a le signe $+$ au lieu du signe $-$, la sous-tangente sera

$= \frac{(m+n).(ax+xx)}{na + nx + mx}$. Si la courbe A$m$ (fig 1)

est supposée une hyperbole ordinaire, dans la-

quelle $m = n = 1$, PT sera $= \frac{2ax + 2xx}{a + 2x}$

$= \frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x}$; d'où l'on tire $\frac{1}{2}a + x : x ::$

$a + x : PT$. Prenant donc une quatriéme proportionnelle aux lignes $\frac{1}{2}a + x$, x, $a + x$, l'on aura la sous-tangente PT.

(*) Pour les cercles, ellipses & hyperboles de tous les genres, voyez les Sections coniques, n. 91, 93 & 94.

11. Pour les paraboloïdes, dont l'équation (voyez les Sections coniques 96) est $a^{m-1}y = x^m + bx^{m-1} + acx^{m-2} + \ldots + a^{m-2}gx + a^{m-1}k$, ou $y = x^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} \ldots + k$, en faisant $a = 1$, l'on a $dy = mx^{m-1}dx + b(m-1)x^{m-2}dx + c(m-2)x^{m-3}dx \ldots + gdx$, dx

$$= \frac{dy}{mx^{m-1} + b(m-1)x^{m-2} + c(m-2)x^{m-3} \ldots\ldots + g}$$

$$\& \frac{ydx}{dy} = \frac{y}{mx^{m-1} + b(m-1)x^{m-2} \ldots\ldots + g}$$

12. Dans la cissoïde (fig. 5), l'on a (courb. alg. 71) $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$, en supposant le diamètre du cercle générateur $= 2a$; donc $y^2 \times (2a-x) = x^3$, $2ydy \times (2a-x) - y^2dx = 3x^2dx$, $2ydy \times (2a-x) = 3x^2dx + dx \times y^2 = dx \times 3x^2 + dx \times \frac{x^3}{2a-x}$ (en substituant la valeur de y^2) $= dx.(\frac{3xx[2a-x]+xxx}{2a-x})$, $dx = \frac{2ydy \times [2a-x] \times [2a-x]}{6ax^2 - 2x^3}$, $\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2 \times [2a-x]^2}{6ax^2 - 2x^3} = \frac{2x^3}{2a-x} \times \frac{[2a-x]^2}{6axx - 2x^3} = \frac{4ax - 2x^2}{6a - 2x} = \frac{[2a-x]x}{3a-x}$; d'où l'on tire $3a - x : 2a - x :: x : TP$.

13. PROBLÊME. *Trouver la sous-tangente dans la cycloïde (fig. 6).* Ayant tiré les ordonnées infiniment proches MP, mp, menez la tangente PT au point P du cercle générateur & la tangente MT au point correspondant M de la cycloïde. Les arcs infiniment petits, Pp, Mm pouvant être considérés comme des portions infiniment petites des tangentes PT, mT, si l'on

tire la ligne Ms parallèle à la tangente PT, les triangles ſemblables Msm, TMP donneront ms : Ms : : MP : PT. Or, à cauſe des parallèles Pp & Ms, MP & ms, l'on a, en faiſant l'arc BP $= x$ & PM $= y$, l'on a, dis-je, $ms = dy$, P$p = dx =$ Ms ; donc $dy : dx :: y :$ PT $= \frac{y\,dx}{dy} = y$; puiſque $dy = dx$ (*), à cauſe de $y = x$ (voyez les Courbes tranſcendantes, n°. 10).

COROLLAIRE I. Donc prenant ſur la tangente du cercle générateur la partie PT égale à l'ordonnnée y, l'on aura la ſous-tangente de la cycloïde.

COROLLAIRE II. Puiſque $y =$ PT, le triangle MPT eſt iſocelle, les angles en T & M, égaux entr'eux, & l'angle extérieur TPb égal aux deux intérieurs oppoſés M & T, ſera double de l'angle M ; mais l'angle TPb a pour meſure la moitié de l'arc PBb, & l'angle TPB a pour meſure la moitié de l'arc PB ; donc ce dernier angle eſt la moitié de l'angle TPb ; donc il eſt égal à l'angle PMT & les lignes BP, TM ſont parallèles, à cauſe des angles correſpondans égaux, c'eſt-à-dire, que la tangente de la cycloïde eſt parallèle à la corde correſpondante du cercle générateur.

14. Dans les cycloïdes allongées ou raccourcies, l'on a $y = \frac{Dx}{C}$. (Courbes tranſcendantes,

(*) On peut regarder l'équation $dy = dx$ comme exprimant la nature de la cycloïde ; parce que x repréſente un arc de cercle.

n°. 10); donc $dy = \frac{D\,dx}{C}$, $dx = \frac{C\,dy}{D}$, $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{Cy}{D} = x = PT$; donc dans ces cycloïdes l'on a PT égal à l'abscisse courbe BP (*) c'est-à-dire, que la sous-tangente est quatriéme proportionnelle aux lignes D, C, y.

15. Dans les cycloïdes de tous les ordres, l'on a (courb. transf. n°. 10.) $C^m y^n = D^n x^m$, $nC^m y^{n-1} dy = m D^n x^{m-1} dx$, $dx = \frac{n C^m y^{n-1} dy}{m D^n x^{m-1}}$, $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{n C^m y^n}{m D^n x^{m-1}} = \frac{n D^n x^m}{m D^n x^{m-1}}$ (en substituant la valeur de $C^m y^n$) $= \frac{nx}{m}$; d'où l'on tire $m : n :: x : PT = \frac{nx}{m}$.
Si $n = 10$ & $m = 2$, l'on a $PT = 5x$; c'est-à-dire, que dans ce cas la sous-tangente est égale au quintuple de l'abscisse courbe BP. Si la courbe BC est telle qu'en supposant toujours l'arc $BP = x$, $PM = y$, l'on ait $a^m y = x^{m+1} + Cx^m$, l'on aura $y = \frac{x^{m+1} + Cx^m}{a^m}$, $dy = \left(\frac{(m+1).\, x^m + C m x^{m-1}}{a^m}\right) \times dx$. Substituant la valeur de dy dans $\frac{y\,dx}{dy}$ (car le résultat est le même que si on substituoit la valeur de dx), il vient $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{a^m y}{(m+1)\, x^m + C.\, m\, x^{m-1}} = PT = \frac{x^{m+1} + Cx^m}{(m+1) x^m + C m\, x^{m-1}}$ (en substituant la valeur de $a^m y$) $= \frac{x^2 + Cx}{(m+1)\, x + Cm}$, en divisant tout par x^{m-1}, d'où l'on tire $(m+1).\, x +$

(*) Il faut regarder dans ce cas-ci la courbe (CBD) comme une cycloïde de l'espéce dont il s'agit.

$Cm : x + C :: x : PT$. Si $m = 2$, l'on a $PT = \frac{x^2 + Cx}{3x + 2C}$.

Si la courbe B P R b étoit une ellipse, en supposant toujours l'arc $BP = x$, $PM = y$, les expressions que nous venons de trouver (13, 14 & 15) auroient encore lieu; mais alors on prendroit P T sur une tangente elliptique; dans ce cas les équations $y = x$, $C^m y^n = D^n x^m$, &c. réprésenteroient des courbes qu'on peut appeller *cycloïdes elliptiques*.

16. Si on suppose que B n D soit une demi-cycloïde ordinaire, ou allongée, ou raccourcie, ou d'un genre quelconque, & que la courbe B z soit telle qu'en faisant l'abscisse courbe $Bn = x$, $nN = y$, l'on ait $x = y$, l'on aura $fF = dy$, en supposant N f parallèle à nt tangente au point n de de la courbe Bn, & les triangles semblables F N f, $t n$ N donneront fF (dy) : fN $= nr$ (dx) :: nN (y) : nt sous-tangente cherchée $= \frac{ydx}{dy}$. Si on suppose $x = y$, à cause de $dx = dy$, l'on aura $nt = y = x$. Si l'on suppose que $C^m : x^m :: D^n : y^n$, l'on aura $D^n x^m = C^m y^n$, & $m x^{m-1} dx = \frac{n C^m y^{n-1}}{D^n}$, $dx = \frac{n C^m y^{n-1} dy}{m D^n x^{m-1}}$, $\frac{ydx}{dy} = \frac{n C^m y^n}{m D^n x^{m-1}} = \frac{n C^m x y^n}{m D^n x^m}$ (en multipliant le numérateur & le dénominateur par x) $= \frac{n x D^n x^m}{m D^n x^m}$, en substituant la valeur de $C^m y^n$) $= \frac{nx}{m}$. Si $m = 2$, $n = 5$, l'on aura $nt = \frac{5x}{2}$.

Si la courbe B n est une parabole, ou une hyperbole d'un genre quelconque, ou encore une courbe quelconque dont on sache mener les tangentes nt, il est visible par ce que nous venons de dire, qu'on pourra toujours trouver la sous-tangente nt de la courbe N B, pourvu qu'on ait une équation algébrique entre les abscisses courbes B n & les ordonnées rectilignes n N.

17. PROBLÊME. *Soit supposée* A V N, (*fig.* 7) *une parabole & une autre courbe* a l M *dont les ordonnées* M P *sont moyennes proportionnelles entre les abscisses* P A *& les ordonnées correspondantes* P N

de la parabole, on demande la ſous-tangente Pb *de la courbe* AM. Soit l'ordonnée de la parabole $=y$, l'ordonnée de la courbe AM$=z$, l'abſciſſe AP$=x$, & le paramêtre de la parabole$=p$. L'on aura NR $=$M$r=$P$p=dx$, nR$=dy$, $mr=dz$. Suppoſant que la ligne Mb eſt tangente de la courbe AM, les triangles mrM, MPb donneront $dz:dx::z:\frac{zdx}{dz}=$ Pb; mais par la nature de la courbe $y:z::z:x$ ou $yx=z^2$, $ydx+xdy=2zdz$, $dz=\frac{ydx+xdy}{2z}$, ſubſtituant cette valeur de dz dans $\frac{zdx}{dz}$, l'on a P$b=\frac{2z^2dx}{ydx+xdy}$; mais l'équation de la parabole $y^2=px$ donne $2ydy=pdx$, $dx=\frac{2ydv}{p}$. Subſtituant cette valeur de dx dans l'expreſſion de Pb, l'on a P$b=\frac{4zzydy}{\frac{p(2yydy+pxdy)}{p}}=\frac{4zzy}{2yy+px}=\frac{4yyx}{2yy+yy\cdot\frac{p}{p}}$ (en ſubſtituant la valeur de zz dans le numérateur, & celle de x dans le dénominateur) $=\frac{4xy^2}{2y^2+y^2}=\frac{4x}{3}$. Prenant donc A$b=\frac{4\text{PA}}{3}$ l'on aura la ſous-tangente cherchée Pb.

Il eſt aiſé de comprendre comment il faudroit s'y prendre ſi la courbe AN étoit une hyperbole ou une autre courbe algébrique quelconque.

18. PROBLÊME. *On a deux courbes* AN, Asf (*fig.* 8) *& une troiſiéme courbe* AM *dont les ordonnées ſont ſuppoſées troiſiémes proportionnelles aux ordonnées de la premiere & de la ſeconde, on demande de mener une tangente à la courbe* AM. Soit s l'ordonnée de la premiere, y celle de la ſeconde cour-

be & z celle de la troisiéme courbe AM; donc par la nature de la courbe AM, on a $s : y :: y : z$, ou $sz = y^2$. Soit la sous-tangente Pt de la premiere courbe $= r$, celle de la courbe A$f = t$, donc $gn = ds$, $fu = dy$, mR $= dz$. Les triangles semblables NPt, Nng donnent NP : Pt :: ng : gN, ou $s : r :: ds : g\text{N} = \frac{rds}{s}$. Les triangles semblables fus, sPa donnent $y : t :: dy : su = \frac{tdy}{y}$. Mais $us = g$N; donc $\frac{tdy}{y} = \frac{rds}{s}$ & $dy = \frac{ryds}{ts}$. Les triangles mMR, MPT donnent Rm : RM $= g$N :: MP : PT ou dz $\frac{rds}{s} :: z : \text{PT} = \frac{rzds}{sdz}$. Il ne s'agit donc plus que de faire disparoître les différentielles ds, dz & les inconnues z & s pour avoir la soustangente exprimée en quantités connues; ce que l'on pourra toujours faire, en supposant que les courbes AN, Af sont des courbes algébriques quelconques. Supposons par exemple que la premiere courbe AN est une parabole & la seconde une hyperbole. De l'équation $sz = y^2$, l'on tire $z = \frac{yy}{s}$, ou $dz = \frac{2ysdy - y^2ds}{s^2} = \frac{2y^2rsds}{ts^3} - \frac{y^2ds}{s^2}$ (en substituant la valeur de dy prise de l'équation $dy = \frac{ryds}{ts}$) $= \frac{2y^2rds - ty^2ds}{ts^2}$. Substituant cette valeur de dz dans $\frac{rzds}{sdz}$, on trouve $\text{PT} = \frac{rtzssds}{2rsyyds - tsyyds} = \frac{tsrz}{2ryy - tyy}$.

$= \frac{tsrz}{2zsr - tzs} = \frac{t.r}{2r - t}$ (en ſubſtituant la valeur sz de y^2); d'où l'on tire $2r - t : t :: r :$ PT. Or r & t ſont cenſés connus; donc on connoîtra PT.

Si la courbe AN étoit rentrante comme par exemple un cercle (fig. 9), la différentielle de l'ordonnée PN correſpondante au quart de cercle AN feroit $=0$; car il eſt viſible que les différences des ordonnées vont en diminuant en s'approchant du point N, auquel point elles ſont cenſées nulles, & la tangente étant parallèle aux abſciſſes AP, les ordonnées pn, NP ſont cenſées égales, & leur différence eſt cenſée $=0$. Donc alors $ds=0$ (*), & l'équation $dz = \frac{2ysdy - y^2ds}{s^2}$ devient $dz = \frac{2ysdy}{s^2}$. Maintenant (fig. 8) les triangles mMR, MPT donnent $dz :$ RM $= us = \frac{tdy}{y} :: z :$ PT $= \frac{ztdy}{ydz} = \frac{sztdy}{2yysdy} = \frac{szt}{2yy}$ $= \frac{szt}{2sz} = \frac{t}{2}$, en ſubſtituant la valeur de y^2; donc dans ce cas la ſous-tangente PT (fig. 9) eſt la moitié de la ſous-tangente Pa de la parabole, c'eſt-à-dire, que la ſous-tangente PT aboutit au point A.

19. Si l'on ſuppoſe (fig. 10) que les ordonnées Pm de la courbe Am ſont moyennes proportionnelles entre les or-

(*) Cela paroîtra plus clair lorſque nous aurons parlé des *maximis* & *minimis*.

données de la courbe AN & celles de la courbe As, on trouvera encore la sous-tangente PT $= \frac{rzds}{sdz}$; mais alors on a $s : z :: z : y$, $sy = zz$, $sdy + yds = 2zdz$, $dz = \frac{sdy + yds}{2z}$, PT $= \frac{2rz^2ds}{ssdy + syds}$; mais nous venons de trouver (18) $dy = \frac{ryds}{ts}$; donc en substituant cette valeur de dy, l'on a PT $= \frac{2rzzds}{\frac{ssryds}{ts} + syds} = \frac{2rz^2t}{sry + sty}$ $= \frac{2rsyt}{sry + sty} = \frac{2rt}{r+t}$; d'où l'on tire $r + t : 2r :: t :$ PT ; or r & t sont censés connus ; donc il sera aisé de connoître la sous-tangente de la courbe AM.

Si la courbe As (fig. 8) partoit d'un point différent de A, & qu'elle devînt Bs (fig. 11), de maniere qu'on eût toujours PN : PM :: PM : Ps, ou $s : z :: z : y$, ou $zz = ys$; à cause que PN augmentant, Ps diminue la différentielle de Ps seroit $= -dy$; donc PT $= \frac{2rzzds}{ssdy + syds}$ deviendra $= \frac{2rzzds}{syds - ssdy} = \frac{2rzzds}{syds - \frac{ssryds}{ts}}$ (en substituant la valeur de dy) $= \frac{2rzz}{\frac{syt - sry}{t}} = \frac{2rtsy}{syt - sry}$ (en substituant la valeur de zz) $= \frac{2rt}{t-r}$; donc $t - r : 2r :: t ::$ PT.

Si (fig. 12 & 13) AN & Bs étoient des lignes droites, la courbe BM seroit une section conique. Car soit le rapport du cosinus au sinus de l'angle sBP comme $f : g$ celui du cosinus au sinus de l'angle NAP comme $m : n$; soit de plus BA $= 2a$, BP $= x$; donc PA (fig. 12) $= 2a - x$ & PA (fig. 13) $= 2a + x$. Cela posé, le triangle PBs (on suppose ici les ordonnées perpendiculaires aux abscisses) donne $f : g ::$ BP : Ps ou $f : g :: x :$ P$s = y = \frac{gx}{f}$. Le triangle rectangle NPA donne $m : n :: 2a \mp x : s = \frac{n}{m} \times (2a \mp x)$. Le signe $-$ est pour la fig. 12, dans laquelle

l'angle B eſt aigu, & le ſigne + pour la fig. 13, dans laquelle l'angle sBA eſt obtus ; donc $zz = ys = \frac{gn}{fm} \times (2ax \mp xx)$ $= \frac{b^2}{a^2} \times (2ax \mp x^2)$, en faiſant le rapport de $gn : fm$ égal à celui de $b^2 : a^2$. Or cette équation appartient à l'ellipſe, en prenant le ſigne — & à l'hyperbole en prenant le ſigne +. Si $b = a$, l'équation appartient au cercle ou à l'hyperbole équilatere. Si $a = \infty$, c'eſt-à-dire, ſi les points B & A ſont ſuppoſés infiniment éloignés, dans ce cas, le terme x^2 diſparoiſſant devant ax, l'on aura (en ſuppoſant $\frac{2bba}{aa} = \frac{2bb}{a} = p$) $z^2 = px$, équation à la parabole.

20. PROBLÊME. *Déterminer la ſous-tangente dans la logarithmique* BM (*fig* 14). Par la nature de cette courbe (voyez les courbes tranſcendantes n°. 3) Lorſque les abſciſſes AP, Ap, AQ, Aq ſont en proportion arithmétique, les ordonnées correſpondantes ſont en proportion géométrique ; puiſque les abſciſſes étant ſuppoſées en progreſſion arithmétique, les ordonnées ſont en progreſſion géométrique ; de maniere que les abſciſſes ſont les logarithmes des ordonnées correſpondantes. Donc ſi l'on fait $PM = y$, l'on aura $Pm = PR + mR = y + dy$; & ſuppoſant $QN = u$, l'on a $qn = u + du$; donc parce que les abſciſſes AP, Ap, AQ, Aq ſont ſuppoſées en proportion arithmétique, l'on a, en faiſant $AP = x$, $Pp = dx = Qq$; l'on a, dis-je, $y : y + dy :: u : u + du$; on aura donc $y : dy :: u : du$, $\frac{y}{dy} = \frac{u}{du}$. Mais la ſous-tangente $PT = \frac{ydx}{dy}$, & par la même raiſon la ſous-tangente Qt eſt

$= \frac{u\,dx}{du}$, puisque $Qq = dx$. Mais $\frac{y}{dx} = \frac{u}{du}$; donc $Qt = \frac{y\,dx}{dy} = PT$, c'eſt-à-dire, que les ſous-tangentes correſpondantes à différentes ordonnées ſont égales entr'elles; donc dans la logarithmique la ſous-tangente eſt conſtante.

21. COROLLAIRE. Si l'on ſuppoſe la ſous-tangente de la logarithmique $= a$, l'on aura $\frac{y\,dx}{dy} = a$ (c'eſt l'équation différentielle de la logarithmique), ou $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{y}$; & en intégrant, $S.\frac{dx}{a} = S.\frac{dy}{y}$, ou $\frac{x}{a} = S.\frac{dy}{y}$; & parce que l'abſciſſe $AP = x$ eſt le logarithme de l'ordonnée correſpondante priſe dans la logarithmique dont la ſous-tangente $= a$, l'on a le théorême ſuivant.

22. THÉORÊME. *L'intégrale* $S.\frac{dy}{y}$ *ou l'intégrale d'une fraction* $\frac{dy}{y}$ *dont le numérateur* dy *eſt la différentielle du dénominateur* y, *eſt le logarithme* x *du dénominateur diviſé par la ſous-tangente* a *de la logarithmique, dans laquelle l'on prend le logarithme.*

Par les mêmes raiſons ſi z eſt l'abſciſſe ou le logarithme d'une ordonnée u dans une autre logarithmique dont la ſous-tangente ſoit b, on aura $\frac{z}{b} = S.\frac{du}{u}$, & ſi l'on ſuppoſe $y = u$, on aura $\frac{z}{b} = S.\frac{du}{u} = S.\frac{dy}{y} = \frac{x}{a}$, & par conſéquent $\frac{z}{b} = \frac{x}{a}$ ou $az = bx$; donc $x : z :: a : b$.

Ainſi en ſuppoſant que y & u repréſentent le même nombre, on aura le théorême ſuivant.

23. THÉORÊME. *Les logarithmes d'un même nombre pris dans deux logarithmiques différentes, ſont entr'eux comme les ſous-tangentes de ces logarithmiques.*

Si dans l'équation $\frac{x}{a} = S. \frac{dy}{y}$ (22), on ſuppoſe $a = 1$, on aura $x = L.y$ (L déſigne le logarithme); donc l'intégrale $S. \frac{dy}{y}$ d'une fraction dont le numérateur eſt la différentielle du dénominateur, eſt toujours égale au logarithme du dénominateur en prenant ce logarithme dans le logarithmique dont la ſous-tangente eſt l'unité; ces ſortes de logarithmes ſont appellés *hyperboliques* (*).

Avant de paſſer plus loin, nous allons expoſer les principes généraux de la différenciation & de l'intégration des quantités logarithmiques & exponentielles & de celles qui renferment des ſinus; coſinus, &c. La lettre L déſignera le logarithme hyperbolique.

24. Si l'on ſuppoſe $L.y = x$, ſa différentielle ſera $= \frac{dy}{y}$; puiſque (23) $\frac{x}{a}$, ou $x = S. \frac{dy}{y}$, en faiſant $a = 1$: *c'eſt-à-dire que la différentielle du logarithme hyperbolique d'un nombre y eſt égale à la différentielle de ce nombre diviſée par le même nombre.*

COROLLAIRE. Donc $d. L. x = \frac{dx}{x}$; $d.L.(b+x)$ $= \frac{d(b+x)}{b+x} = \frac{dx}{b+x}$; $S. \frac{dx}{b+x} = L.(b+x)$;

(*) On en verra la raiſon dans la ſuite de cet Ouvrage, (ſect. 2, n°. 7).

S. $\frac{dx}{x}$ = L. x. de même d. L. $(a+x) = \frac{dx}{a+x}$ $= dx \times \frac{1}{a+x} = dx \times 1 \times (a+x)^{-1} = dx \times$ $(a+x)^{-1}$. Elevant $(a+x)$ à la puissance $= -1$, par la formule du binome de Newton (voyez la premiere Partie de cet Ouvrage), l'on a $dx \times (a^m + m a^{m-1} x + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} x^2 + \&c.) = dx \times a^{-1} (1 - x a^{-1} + x^2 a^{-2} \&c.) = dx \times a^{-1} \times (1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \&c.)$, à cause de $m = -1$, ou $\frac{dx}{a} - \frac{x\,dx}{a^2} + \frac{x^2\,dx}{a^3} - \frac{x^3\,dx}{a^4} + \&c.$ & S. $\frac{dx}{a+x} = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} +$ &c, en prenant l'intégrale de chaque terme. Lorsque $x = 0$, cette serie est $= 0$, mais alors on doit avoir L. a; donc il faut ajouter L. a à cette serie, ainsi qu'on pourra le comprendre quand nous aurons parlé dans la suite de cet Ouvrage de la constante qu'on doit ajouter aux intégrales.

La différentielle de logarithme $1 - x$ est $= -\frac{dx}{1-x} = -dx.(1-x)^{-1} = -dx - x\,dx - x^2\,dx$ &c. & S. $\frac{dx}{1-x} = -x - x^2 - x^3$ &c. de sorte que le logarithme hyperbolique de la quantité $1 - x$ plus petite que l'unité est négatif; par exemple en supposant $x = \frac{1}{3}$ le logarithme de $1 - x$ ou de $\frac{2}{3}$ sera négatif; ainsi en supposant AB $= 1$ (fig. 14), le logarithme de $fg < 1$ sera $= g$ A. Or Ag est une abscisse négative, étant prise vers la gauche au lieu

que les abſciſſes AP, Ap ſont poſitives; donc $d. L. (\frac{a+x}{a-x}) = d. L. (a+x - d. L. (a-x)$ (*) $= \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{a-x}) = \frac{2adx}{aa-xx}$ (en réduiſant au même dénominateur) $= 2adx \times (aa-xx)^{-1}$. Elevant $aa-xx$ à la puiſſance -1 par la formule ordinaire $a^m \times (1 + \frac{m}{1}\frac{b}{a} + \frac{m(m-1)}{1\ 2}\frac{b^2}{a^2} +$ &c.), en ſubſtituant aa pour a, $-x^2$ pour b, -1 pour m, l'on a $(aa-xx)^{-1} = a^{-2}(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} +$ &c.) (**); donc $2adx \times (aa-xx)^{-1} = 2a^{-2}dx \times (1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} +$&c.) & $S.\frac{2adx}{aa-xx} = S.\frac{dx}{a+x} - S.\frac{dx}{a-x} = L.(\frac{a+x}{a-x}) = S.2(\frac{dx}{a} + \frac{x^2dx}{a^3} + \frac{x^4dx}{a^5} +$ &c.) $= 2.(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \frac{x^7}{7a^7} +$ &c.) (B). Si l'on ſuppoſe $\frac{a+x}{a-x} = b$, on aura $a+x = ba - bx$, $x + bx = ba - a$, $x = a.\frac{(b-1)}{b+1} = a.f$ en faiſant $\frac{b-1}{b+1} = f$. Subſ-

(*) Parce que (voyez les logarithmes dans la premiere partie de cet Ouvrage) le logarithme du quotient ſe trouve en retranchant celui du diviſeur de celui du dividende.

(**) En faiſant attention que a^2 élevé à l'expoſante -1, eſt $= a^{-2}$, en multipliant 2 par -1.

ſtituant cette valeur de x dans la formule B & réduiſant, il vient $2f + \frac{2f^3}{3} + \frac{2f^5}{5} + \frac{2f^7}{7} + \frac{2f^9}{9} +$ &c. (A) logarithme hyperbolique de $\frac{a+x}{a-x} = b$; & parce que $f = \frac{b-1}{b+1}$ eſt une fraction plus petite que l'unité, en ſuppoſant que b eſt un nombre entier poſitif, il eſt évident que la ſerie A ſera toujours convergente. Or cette ſerie eſt égale au double de la ſomme des puiſſances impaires de f, en diviſant chaque terme par l'expoſant de f dans le même terme; donc on aura facilement le logarithme hyperbolique du nombre b. Si $b = 10$, on aura $\frac{b-1}{b+1} = f = \frac{9}{11}$; prenant donc la valeur de la ſerie A, en s'en tenant à ſix décimales, l'on a L. $10 = 2.302585$ que nous ferons $=$ N.

REMARQUE. Quoique la valeur de x dépende de celle de a, néanmoins la valeur de L. $(\frac{a+x}{a-x})$ ne dépend point de a, mais ſeulement de b, ce qui mérite d'être remarqué.

REMARQUE 2. Le logarithme de 10 dans les tables eſt $= 1$; *donc* (23) *le logarithme hyperbolique de* 10, ou N eſt au logarithme tabulaire 1 du même nombre, comme la ſous-tangente 1 de la logarithmique hyperbolique (*) eſt la ſous-tangente M de la logarithmique tabulaire (**); ou N : 1 ::

(*) C'eſt celle dont la ſous-tangente 1.
(**) C'eſt celle ſur laquelle on peut concevoir qu'on a conſtruit les tables ordinaires.

$1 :: M = \frac{1}{N} = \frac{1}{2.302585} = 0.434294$

à peu près en réduisant $\frac{1}{N}$ en fraction décimale.

COROLLAIRE. Donc en supposant $= A$ le logarithme tabulaire du nombre B, on aura le logarithme hyperbolique du même nombre, en faisant (23) M sous-tangente de la logarithmique des tables est à 1 sous-tangente de la logarithmique hyperbolique, comme A logarithme tabulaire de B est à H logarithme hyperbolique de B, ou $M : 1 ::$ $A : H = \frac{A}{M} = AN$, parce que $M = \frac{1}{N}$; donc $A = \frac{H}{N} = HM$; *c'est-à-dire que le logarithme hyperbolique d'un nombre est égal au logarithme tabulaire du même nombre multiplié par* N, *& le logarithme tabulaire est égal au logarithme hyperbolique multiplié par* M. Nous appellerons *modules* les nombres N & M. Le premier sera le module des logarithmes hyperboliques, & le second celui des logarithmes tabulaires. On voit maintenant comment par le moyen du logarithme tabulaire d'un nombre on peut déterminer son logarithme hyperbolique & réciproquement.

REMARQUE. En supposant $= e$ le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$, l'on aura $L.e = 1$, & $e = 2.7182818$ (premiere partie courb. alg. 47).

$d.L.(\frac{a}{a+x}) = d.L.a - d.L.(a+x) = 0$

$- \frac{d.(a+x)}{a+x}$ (à cause de la constante a dont la différentielle $= 0$) $= \frac{-dx}{a+x}$; donc $S.\frac{-dx}{a+x}$

$= L. \frac{a}{a+x}$, & S. $- \frac{-b.dx}{a+x} = b$ S. $- \frac{-dx}{a+x}$ $= b.l. \frac{a}{a+x}$. de même S. $- \frac{-dx}{b.(a+x)} = \frac{1}{b}$ S. $\frac{-dx}{a+x} = \frac{1}{b}.L.\frac{a}{a+x}$; $d.L. \frac{a}{a-x} = \frac{+dx}{a-x}$; & S. $\frac{dx}{a-x} = L. \frac{a}{a-x}$. L'on a aussi $d.L.(aa+xx)$ $= \frac{2xdx}{aa+xx}$, & S. $\frac{2mxdx}{aa+x^2} = m L.(aa+xx)$; $d. L.(a+x)^m = d. m L. (a+x)$ (*) $= \frac{mdx}{a+x}$ & S. $\frac{mdx}{a+x} = m. L.(a+x) = L.(a+x)^m$; $d.L.\sqrt{a+x} = d.L.(a+x)^{\frac{1}{2}} = d.\frac{1}{2}.L.(a+x)$ $= \frac{1}{2} \times \frac{dx}{a+x}$, & S. $\frac{1}{2}.\frac{dx}{a+x} = \frac{1}{2} L.(a+x)$ $= L.(a+x)^{\frac{1}{2}} = L.\sqrt{a+x}$.

COROLLAIRE. *Donc on trouvera l'intégrale d'une différentielle* $\frac{dx}{a+x}$ *toutes les fois que cette différentielle sera décomposable en deux parties, telles que le dividende sera la différentielle du diviseur, & l'intégrale sera alors le logarithme hyperbolique du diviseur. Mais si cette différentielle se trouve multipliée par une constante quelconque entiere ou fractionnaire, il suffira de prendre l'intégrale comme s'il n'y avoit aucun multiplicateur,*

(*) Car le logarithme d'une puissance d'un nombre est égal au produit de l'exposant de la puissance par le logarithme du nombre (voyez la premiere partie de cet Ouvrage).

multiplicateur conſtant, *& de multiplier enſuite cette intégrale par le multiplicateur conſtant.* Ainſi S. $\frac{dx}{1+x}$ étant $=$ L. $(1+x)$; S. $\frac{b\,dx}{1+x}$ ſera $= b. \times$ L. $(1+x)$; & S. $\frac{dx}{b(1+x)}$ ſera $= \frac{1}{b}$. S. $\frac{dx}{1+x} = \frac{1}{b}$ L. $(1+x)$, en prenant d'abord l'intégrale de $\frac{dx}{1+x}$, & multipliant cette intégrale par b, dans le premier cas, & par $\frac{1}{b}$, dans le ſecond cas. d. L. $(a+x^m) = \frac{mx^{m-1}dx}{a+x^m}$, & S. $\frac{bmx^{m-1}dx}{a+x^m} = b$. S. $\frac{mx^{m-1}dx}{a+x^m} = b$. L. $(a+x^m)$. l'on a auſſi d. L. $x^m = m. \frac{x^{m-1}dx}{x^m} = \frac{mdx}{x}$, & S. $\frac{mdx}{x} = m$. S. $\frac{dx}{x} = m$. L. $x =$ L. x^m; d. L. $xy = d$ L. $x + d$. L. y (*) $= \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$, & S. $\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right) =$ L. $x +$ L. $y =$ L. $x\,y$. On peut auſſi différencier des puiſſances des logarithmes ou même les logarithmes des logarithmes. Pour différencier (L. $x)^m$, je ſuppoſe $z = ($L. $x)^m = y^m$, en faiſant L. $x = y$, pour avoir $dz = my^{m-1}dy$; or $y =$ L. x; donc $dy = \frac{dx}{x}$; c'eſt pourquoi en ſubſtituant la valeur de y & de dy, l'on a $dz = m($L. $x)^{m-1} \times$

(*) Car par la premiere partie de cet Ouvrage le logarithme du produit des deux nombres eſt égal à la ſomme des logarithmes de ces nombres.

$\frac{dx}{x}$, & S. $m(\text{L}.x)^{m-1}.\frac{dx}{x} = z = (\text{L}.x)^m$. Si l'on a $z = x^n.(\text{L}.x)^m$, on pourra différencier en considérant d'abord le facteur x^m comme variable, & l'autre facteur comme constant; pour considérer ensuite le second facteur comme variable, & le premier comme constant, & l'on aura $dz = nx^{n-1}dx(\text{L}.x)^m + mx^n(\text{L}.x)^{m-1}.\frac{dx}{x} = nx^{n-1} \times (\text{L}.x)^m dx + mx^{n-1}(\text{L}.x)^{m-1}dx = x^{n-1}dx \times (\text{L}.x)^{m-1} \times (n\text{L}.x + m)$, & S. $(x^{n-1}dx(\text{L}.x)^{m-1} \times (n\text{L}.x + m)) = x^n.(\text{L}x)^m$. Soit $z = \text{L}.(\text{L}.x)$, L. (L. x) marque le logarithme du logarithme de x, je fais L. $x = y$, & j'ai $z = \text{L}.y$, $dz = \frac{dy}{y}$; or $dy = \frac{dx}{x}$; donc $dz = \frac{dx}{x\,\text{L}.x}$. & S $\frac{dx}{x\,\text{L}.x} = \text{L}.\text{L}.x = \text{L}.(\text{L}.x)$.

25. Puisque $d.\text{L}.x = \frac{dx}{x}$, on a $x\,d.\text{L}.x = dx$, d'où l'on déduit ce théorême. *La différentielle dx d'une quantité quelconque x est égale au produit de cette quantité par la différentielle de son logarithme.*

COROLLAIRE. Donc la différentielle de y^m sera $y^m d.\text{L}.y^m = y^m.m.\frac{dy}{y} = my^{m-1}dy$; ce qu'on fait d'ailleurs.

La différentielle de la quantité exponentielle a^x (*)

(*) Les *quantités exponentielles* sont celles qui ont des exposans variables, comme x^y qui a un exposant variable y, a^{x^z} qui a un exposant variable x qui lui-même a un exposant variable z.

ſera $= a^x d. L. a^x = a^x dx L. a$; puiſque le logarithme de a^2 eſt $= L. a^2 = 2 L. a$, l'on aura auſſi $L. a^x = x L. a$; parce que $d. L. a = 0$. Donc $S. a^x L. a. dx = \frac{a^x L. a. dx}{L. a. dx} = a^x$; on a auſſi $b. S. a^x. L. a. dx = \frac{b a^x L. a\, dx}{L. a. dx} = b a^x$.

La différentielle de x^y ſera $= x^y d. L. x^y$; or $L. x^y = y L. x$, & $d(y L. x) = dy L. x + y \frac{dx}{x}$; donc $d.(x^y) = x^y (dy L. x + y \frac{dx}{x})$. L'on a donc

$$S. bx^y \left(dy L. x + \frac{y dx}{x}\right) = \frac{bx^y \left(dy L. x + y \frac{dx}{x}\right)}{dy L. x + y x^{-1} dx}$$

$= bx^y$; de-là nous tirons le théorême ſuivant.

26. THÉORÊME. *La différentielle d'une quantité exponentielle ſe trouve en multipliant cette quantité par la différentielle de ſon logarithme; & l'intégrale d'une quantité qu'on pourra décompoſer en deux facteurs dont l'un ſoit la différentielle du logarithme de l'autre, que cet autre facteur ſoit multiplié ou non par une conſtante, ſe trouvera en diviſant la différentielle propoſée par la différentielle du logarithme de ce ſecond facteur.*

Ainſi je vois que la différentielle de e^x eſt $= e^x d. L. e^x = e^x d. (x L. e) = e^x dx L. e = e^x. dx$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt $= 1$; c'eſt-à-dire, que l'exponentielle particuliere e^x a pour différentielle le produit de cette exponentielle même par la différentielle de ſon expoſant; donc $S. dx. e^x = \frac{dx. e^x}{dx} = e^x$; $S. dx. e^{ax} = S. \frac{a. dx. e^{ax}}{a} = \frac{a dx e^{ax}}{a a dx L. e} = \frac{e^{ax}}{a L. e} = \frac{e^{ax}}{a}$, en ſuppo-

ſant $= e$ le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt 1. Dans ce dernier cas, on a introduit le multiplicateur & le diviſeur a, parce que la différentielle de ax eſt adx. La différentielle de x^{y^z} eſt $= x^{y^z}\ d.\ L.\ x^{y^z} = x^{y^z} d.(y^z)L.x)$. Or $d.(y^z L.x)$ $= y^z \frac{dx}{x} + L.xy^z\ (dz L.y + \frac{z\,dy}{y})$; donc $d.(x^{y^z}) = x^{y^z}.y^z(\frac{dx}{x} + dz.L.x.L.y + \frac{z\,L.x\,dy}{y})$; & $S.\ x^{y^z} y^z (\frac{dx}{x} + dz.L.x.L.y + \frac{z\,L.x.dy}{y}) = x^{y^z}$.

REMARQUE. Si l'on avoit l'équation $x^x = a$, on trouveroit $L.x^x$ ou $x\,L.\,x = L.a$. Et réciproquement, on pourroit repaſſer de cette équation logarithmique à l'équation exponentielle $x^x = a$. Cette derniere opération s'appelle *repaſſer des logarithmes aux nombres*. Si on a l'équation $L.y = x = x\,L.\,e$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$, on aura $y = e^x$, qui eſt l'équation d'une logarithmique, dans laquelle $\frac{dy}{y} = dx$, & $L.y = x L.e = x$.

27. Pour différencier une quantité telle que *ſin.* x ou ſinus de l'arc x, il faut concevoir que cet arc devient $x + dx$, & alors *ſin.* $(x + dx)$ $-$ *ſin* x eſt la différentielle de *ſin.* x. Or, ſelon ce que nous avons dit (Géom. 136) *ſin.* $(x + dx)$ $=$ *ſin.* x. *coſ.* $dx +$ *ſin.* dx. *coſ.* x, en ſuppoſant le rayon $= 1$. Mais le ſinus d'un arc infiniment petit dx eſt cenſé égal à cet arc, & ſon coſinus eſt cenſé égal au rayon que je ſuppoſe $= 1$; donc *ſin.* $dx = dx$, & *coſ.* $dx = 1$; donc *ſin.* $(x + dx)$ $-$ *ſin.* $x = dx \times$ *coſ.* x; c'eſt-à-dire, *que la différentielle du ſinus d'un angle ou d'un arc eſt égale à la*

différentielle de l'angle ou de l'arc par le cosinus de cet angle ou de cet arc : nous supposons que le rayon de l'arc qui mesure cet angle est $= 1$.

La différentielle de $cos. x$ est $= cos. (x + dx) - cos. x$. Or selon ce qu'on a dit dans la Géométrie $cos. (x + dx) = cos. x \, cos. dx - sin. x. \, sin. dx = cos. x - sin. x \, dx$, à cause de $cos. dx = 1$, & de $sin. dx = dx$; donc $d \, cos. x = - dx \, sin. x$; c'est-à-dire, *que la différentielle du cosinus d'un arc dont le rayon* $= 1$ *est égale au produit de la différentielle de cet arc (prise avec un signe contraire) par le sinus de ce même arc.*

COROLLAIRE. Donc $S. dx. cos. x = sin. x$; $S. - dx. sin. x = cos. x$; $d. (cos. 5x) = - 5 dx \times sin. 5x$, & $S. - 5 dx. sin. 5x = cos. 5x$, parce que la différentielle de l'arc x étant dx, celle de l'arc $5x$ sera $5 dx$; de même (m étant un nombre constant) $d. (cos. mx) = - m dx \, sin. mx$, & $S. - m dx \, sin. mx = cos. mx$, & par conséquent $+ S. m dx \, sin. mx = S. - 1 \times - m dx \, sin. mx = - 1 \times S. - m dx \, sin. mx = - 1. cos. mx = - cos. mx$; $d. (sin. mx) = m \, dx \, cos. mx$, & $S. m dx. cos. mx = sin. mx$; $S. - m \, dx \, cos. mx = - sin. mx$; $S. a m dx \, cos. mx = a \, sin. mx$.

Pour différencier le produit $sin. x. cos. z$, je suppose $sin. x = y$ & $cos. z = t$; donc $dy = dx. cos. x$, & $dt = - dz \, sin. z$. Or $d (yt) = t dy + y dt$; donc en substituant les valeurs de y, dy, t, dt, l'on a $d. (sin. x \, cos. z) = dx \, cos. x. cos. z - dz. sin. z. sin. x$, & $S. (dx \, cos. x. cos. z. - dz \, sin. x. sin. z) = sin. x. cos. z$.

Pour avoir la différence de $(sin. x)^m$, je fais $sin. x = y$, & j'ai $dy = dx. cos. x$; $(sin. x)^m = y^m$, $d (sin. x)^m = d. (y^m) = m y^{m-1} dy = m (sin. x)^{m-1} \times dx. cos. x$; donc $S. a \, m. dx \, cos. x \, (sin. x)^{m-1} =$

$a\,(\sin.x)^m$; $S.\,dx\,\cos.x.\sin.x^{m-1} = \frac{(\sin.x)^m}{m}$;

Pour avoir la différentielle de $(\cos.x)^m$, je fais $(\cos.x)^m = y^m$, $\cos.x = y$; donc $dy = -dx\,\sin.x$, & $d.(\cos.x)^m = my^{m-1}\,dy = -m\,dx\,\sin.x \times (\cos.x)^{m-1}$; donc $S. -m\,dx\,\sin.x\,(\cos.x)^{m-1} = (\cos.x)^m$.

Puisque (voyez la Géométrie) le cosinus est au sinus d'un arc, comme le rayon 1 est à la tangente de cet arc, l'on aura la tangente t d'un arc x, ou $t.x = \frac{\sin.x}{\cos.x}$. Supposant $\sin.x = y$, $\cos.x = z$, l'on a $d(\frac{\sin.x}{\cos.x}) = d.(\frac{y}{z}) = \frac{z\,dy - y\,dz}{z^2}$ $= \frac{\cos.x\,\cos.x\,dx + \sin.x.\sin.x.dx}{(\cos.x)^2} = \frac{(\cos.x^2 + \sin.x^2)\,dx}{(\cos.x)^2}$ $= \frac{dx}{(\cos.x)^2}$ (*); *donc la différentielle de $t.x$ ou la différentielle de la tangente d'un arc dont le rayon $= 1$, est égale à la différentielle de cet arc divisée par le quarré du cosinus du même arc*; donc $S.\frac{dx}{(\cos.x)^2} =$ $tang.x$, & $d.(t.x) = \frac{dx}{(\cos.x)^2}$, ou $(\cos.x)^2.d(t.x) = dx$, & $S.(\cos.x)^2.\,d(tx) = S.dx = x$.

Si on vouloit avoir la différentielle de la cotangente d'un arc x, on feroit attention que $\cot.x = \frac{\cos.x}{\sin.x}$ (**); donc $d(\cot.x) = d(\frac{\cos.x}{\sin.x}) =$

(*) Car (fig. 15) il est visible qu'à cause du triangle rectangle bPC, le quarré du rayon $Cb = 1$ est égal à la somme des quarrés du cosinus CP & du sinus Pb, donc cette somme est $= 1$.

(**) Car (Géom. 134) $\cot = \frac{\cos}{\sin}$.

$d\left(\frac{z}{y}\right)$, en faisant $cos.\,x = z$, & $sin.\,x = y$, sera $= \frac{y\,dz - z\,dy}{y^2} = \frac{-dx\,(sin.\,x)^2 - dx\,(cos.\,x)^2}{(sin.\,x)^2}$ $= \frac{-dx \times ((sin.\,x)^2 + (cos.\,x)^2)}{(sin.\,x)^2} = \frac{-dx}{(sin.\,x)^2}$ (à cause $(sin.\,x)^2 + (cos.\,x)^2 = 1$; *donc la différentielle de la cotangente d'un arc x est égale à la différentielle de cet arc, prise avec un signe contraire, & divisée par le quarré du sinus du même arc;* donc $S. - \frac{dx}{(sin.\,x)^2} = cot.\,x$; $S. + \frac{dx}{(sin.\,x)^2} = -cot.\,x$; $S. - \frac{b\,dx}{(sin.\,x)^2} = b.\,S. - \frac{dx}{(sin.\,x)^2} = b.\,cot.\,x$.

Pour avoir les différentielles de la sécante & de la cosécante de l'arc x, je fais attention (fig. 15) que les triangles semblables Cag, Cpb donnent (en faisant l'arc $ar = x$, & le rayon $= 1$) $CP : Cb :: Ca : Cg$, ou $cos.\,x : 1 :: 1 : sec.\,x = \frac{1}{cos.\,x}$. Les triangles Cms, Cnb, donnent $Cn = bP = sin.\,x : Cm :: Cb : Cs$, ou $sin.\,x : 1 :: 1 : cosec.\,x = \frac{1}{sin.\,x}$. Supposant donc $y = \frac{1}{cos.\,x}$, j'ai $dy = d.\left(\frac{1}{cos.\,x}\right)$, $y \times cos.\,x = 1$, $dy\,cos.\,x - y\,dx\,sin.\,x = 0$ (à cause de 1 quantité constante); donc $dy\,cos.\,x = y\,dx\,sin.\,x = \frac{1}{cos.\,x} \times dx\,sin.\,x$ & $dy = \frac{dx\,sin.\,x}{(cos.\,x)^2}$. *Donc la différentielle de la sécante d'un arc x est égale à la différentielle de cet arc multipliée par le*

sinus & divisée par le quarré du cosinus du même arc ; donc S. $\frac{b\,dx\,sin.\,x}{(cos.\,x)^2} = b\,sec.\,x$. Mais $tang.\,x = \frac{sin.\,x}{cos.\,x}$, & $\frac{1}{cos.\,x} = sec.\,x$; donc $\frac{sin.\,x}{(cos.\,x)^2} = tang.\,x.\,sec.\,x$, & $d.\,(sec.\,x) = dx.\,tang.\,x \times sec.\,x$, ou $dy = dx.\,tang.\,x.\,y$ (en faisant $sec.\,x = y$), ou $dx = \frac{dy}{y\,tang.\,x} = \frac{dy}{y\sqrt{yy-1}}$ (*), & S. $b.\,d\,x\,tang.\,x.\,sec.\,x = b.\,sec.\,x$.

Puisque, comme nous venons de le voir, $cosec.\,x = \frac{1}{sin.\,x}$, on aura $d.\,(\frac{1}{sin.\,x}) = dz$, en faisant $cosec.\,x = z = \frac{1}{sin.\,x}$; ce qui donne $z.\,sin.\,x = 1$, $dz \times sin.\,x + z\,dx.\,cos.\,x = 0$, $dz\,sin.\,x = -z\,dx \times cos.\,x$, $dz = \frac{-z\,dx\,cos.\,x}{sin.\,x} = \frac{-d.\,x.\,cos.\,x}{(sin.\,x)^2}$, en substituant la valeur de z.

Donc *la différentielle de la cosécante d'un arc x est égale au produit de la différentielle de cet arc (prise avec un signe contraire) multipliée par le cosinus & divisée par le quarré du sinus du même arc.*

COROLLAIRE. Donc S. $\frac{b\,dx\,cos.\,x}{(sin.\,x)^2} = b\,cosec.\,x$.

Le sinus verse P a de l'arc $a\,b$ étant égal à Ca — C P $= 1 - cos.\,x$, la différentielle de *sin.* V x (†) sera $= + dx\,sin.\,x$, & S. $dx\,sin.\,x = sin.$ V x.

Il n'est pas difficile de voir comment on trouve-

(*) Car le quarré de la tangente est égal au quarré de la sécante moins celui du rayon.

(†) L'expression V x désigne le sinus verse de l'arc x.

roit les deuxiémes, troisiémes, &c. différences des lignes dont nous venons de parler. Par exemple, la premiere différence de *sin.* V x étant $= dx \times$ *sin.* x, la seconde différence sera ddx *sin.* $x + dx \times dx$ *cos.* $x = ddx$ *sin.* $x + (dx)^2$ *cos.* x, & S. (ddx *sin.* $x + dx^2$ *cos.* x) $= dx$ *sin.* x.

REMARQUE. Comme on peut exprimer le sinus de x par $\sqrt{1-(cos.x)^2}$, & *cos.* x par $\sqrt{1-(sin.x)^2}$, En supposant le rayon $= 1$, il est visible qu'en introduisant ces valeurs de *sin.* x, & de *cos.* x dans les formules ci-dessus, on aura des formules différentes.

Pour intégrer dx *sin.* mx. *cos.* nx, on changeroit, selon ce qui a été dit (Géom. 170) cette expression en celle-ci, (P) (*) $\frac{1}{2}. dx\,(sin.(mx+nx) + sin.(mx-nx))$ $= \frac{1}{2}. \frac{(m+n)\,dx\,sin.(m+n).x}{m+n} + \frac{1}{2}\frac{(m-n)\,dx\,sin.(m-n).x}{m-n}$, qui a pour intégrale $-\frac{1}{2}.\frac{cos.(m+n)x}{m+n} - \frac{1}{2}\frac{cos.(m-n)x}{m-n}$, comme on peut le vérifier en différenciant. Pour intégrer dx *sin.* mx. *cos.* nx. *sin.* $p.x$, on convertiroit *sin.* mx. *cos.* nx. *sin.* px en *sinus* de la somme & de la différence des arcs mx, nx, px. Supposons que *sin.* mx. *cos.* $nx =$ *sin.* fx, nous aurons à intégrer dx. *sin.* fx. *sin.* px. Or, selon ce qu'on a dit (Géom. 170) *sin.* fx. *sin.* $px = \frac{cos.(fx-px) - cos.(fx+px)}{2}$ $= \frac{1}{2}. \frac{f-p}{f-p} \times cos.(f-p)\,x - \frac{1}{2}\left(\frac{f+p}{f+p}\right) \times cos.(f+p).x$; ainsi l'on aura dx. *sin.* fx. *sin.* $p\,x = \frac{1}{2} dx \times \frac{(f-p)\,cos.(f-p)\,x}{f-p} - \frac{1}{2} dx \times \frac{f+p}{f+p} \times cos.(f+p)\,x$,

(*) L'on a dit (voyez Géométrie 170), que *sin.* a *cos.* b. $= \frac{sin.(a+b) + sin\,(a-b)}{2}$; d'où l'on déduit facilement l'équation P, en faisant $a = mx$, $b = nx$.

dont l'intégrale est $\frac{1}{2}.\frac{\text{sin.}\,(f-p)\,x}{f-p}+\frac{1}{2}\frac{\text{sin.}\,[f+p]\,x}{f+p}$.

Si $f=p=1$, l'on a $dx\,\text{sin.}\,f\,x.\,\text{sin.}\,p\,x = dx.\frac{\text{cos.}\,0\,x}{2}$ $-\frac{1}{2}\frac{2x\,\text{cos.}\,2\,x}{2} = dx \times \frac{1}{2} - dx\frac{2\,\text{cos.}\,2\,x}{4}$, parce que le cosinus d'un arc $=0$ est égal au rayon $=1$; donc S. $dx\,\text{sin.}\,f\,x.\,\text{sin.}\,p\,x$, devient $=\frac{x}{2}$ — S. $\frac{2\,dx\,\text{cos.}\,2\,x}{4}$ $=\frac{x}{2}-\frac{\text{sin.}\,(2\,x)}{4}=\frac{x}{2}-\frac{\text{sin.}\,x.\,\text{cos.}\,x}{2}$, ce qu'il est aisé de vérifier.

Si l'on avoit à intégrer $dx\,(\text{sin.}\,x)^3 = dx\,\text{sin.}\,x.\,(\text{sin.}\,x)^2$, on réduiroit $(\text{sin.}\,x)^2 = \text{sin.}\,x\,\text{sin.}\,x$ en $\frac{1}{2}\,\text{cos.}\,(x-x)$ $-\frac{1}{2}\,\text{cos.}\,(x+x) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\text{cos.}\,2\,x$, & l'on auroit $\frac{dx\,\text{sin.}\,x}{2}$ $-\frac{1}{2}\,\text{sin.}\,x\,\text{cos.}\,2.\,x$ à intégrer ; mais $\frac{1}{2}$ S. $dx\,\text{sin.}\,x$ $=-\frac{1}{2}\,\text{cos.}\,x$. A l'égard de $dx\,\frac{1}{2}\,\text{sin.}\,x\,\text{cos.}\,2\,x$, on réduira $\text{sin.}\,x.\,\text{cos.}\,2\,x$, comme on l'a fait pour $\text{sin.}\,m\,x.\,\text{cos.}\,n\,x$, & l'intégration sera facile.

En général, m & r étant des nombres entiers positifs, on réduira toutes les formules de cette forme $dx.\,(\text{sin.}\,x)^m$, ou de celle-ci $d\,x.\,(\text{sin.}\,a\,x)^m.\,(\text{cos.}\,b\,x)^m.\,(\text{sin.}\,p\,x)^r$ en sinus ou cosinus de la somme ou de la différence des arcs $a\,x$, $b\,x$, $p\,x$. Il suffit pour cela d'être au fait de ce que nous avons dit sur les sinus & cosinus dans notre Géométrie, & d'avoir bien compris ce que nous venons de dire sur cette matiere.

S. $\frac{dx\,\text{cos.}\,x}{\text{sin.}\,x} = \text{L.}\,\text{sin.}\,x$; puisque le dividende de cette fraction est la différentielle du diviseur, ce qui caractérise (24) la différentielle d'un logarithme. De même S. $-\frac{dx\,\text{sin.}\,x}{\text{cos.}\,x} = \text{L.}\,\text{cos.}\,x$; S. $\frac{dx}{(\text{cos.}\,x)^2\,\text{tang.}\,x} = \text{L.}\,\text{tang.}\,x$, en faisant attention que la différentielle $\frac{dx}{(\text{cos.}\,x)^2}$ de la tangente, est divisée par cette même tangente ; de même S. $\frac{-dx}{[\text{sin.}\,x]^2\,\text{cot.}\,x} =$ L. $\text{cot.}\,x$. La différentielle de $\text{sec.}\,x$ étant, ainsi qu'on l'a dit ci-dessus, $\frac{dx\,\text{sin.}\,x}{(\text{cos.}\,x)^2}$, l'on aura S. $\frac{dx.\,\text{sin.}\,x}{(\text{cos.}\,x)^2.\,\text{sec.}\,x} =$

L. *sec.* x, & parce que $d.(\text{coséc.}\,x) = \frac{-dx\,\text{cos}.\,x}{[\text{sin}.\,x]^2}$, l'on a S. $\frac{-dx\,\text{cos}.\,x}{[\text{sin}.\,x]^2\,\text{cosec}.\,x} = $ L. *coséc.* x. Revenons maintenant aux sous-tangentes des courbes.

28. PROBLÊME. Trouver la sous-tangente de la courbe CMB (fig. 16) dont l'équation est (*courbes méchaniques* n°. 5) $\frac{y}{b} = a\ \text{sin}.\ \frac{x}{c}$, ou $y = b \times a\,\text{sin}.\,x$, en faisant $c = 1$ (*). Soit z l'arc dont le sinus est x, bz sera $= b.\,a\,\text{sin}.\,x$, $bdz = d(b.a.\text{sin}.\,x)$. Pour avoir la différentielle d'un arc dont le sinus rl est $= x$ (fig. 15), ayant tiré ri perpendiculaire sur Pb, le triangle rectangle bri (on considere l'arc infiniment petit rb comme une ligne droite) sera semblable au triangle CbP, parce que ces triangles ont leurs côtés perpendiculaires, ce qui les rend semblables; donc $rb = dy$ (en faisant l'arc $ar = y$) : $bi = dx$ (on fait $rl = x$) :: C$b = 1$: CP $= \text{cos}.\,y$; donc $dy = \frac{dx}{\text{cos}.\,y}$; *c'est-a-dire*, *que la differentielle d'un arc est égale à celle de son sinus, divisée par le cosinus du même arc*; donc $d.(b.a.\text{sin}.\,x) = dy = \frac{b\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ (**); donc $dx = dy.\,\frac{\sqrt{(1-xx)}}{b}$, & PT $= \frac{y\,dx}{dy} = y\,\frac{\sqrt{(1-xx)}}{b}$.

(*) C'est-à-dire que dans cette courbe les ordonnées sont égales au produit de b par l'arc EF correspondant dont le sinus, est $= x =$ CP, & l'ordonnée PM $= y$, le rayon CA du cercle étant $= c = 1$; a désigne l'arc dont le sinus est x.

(**) x étant le sinus $\sqrt{(1-xx)}$ est le cosinus.

$= a$ *fin.* $x. \sqrt{(1 - xx)}$ d'où l'on tire (pour la fig. 16.) C A = 1 : F E :: P E : PT.

29 PROBLÈME. *Trouver la sous-tangente de la courbe* C D N, *dont l'équation est* $y = x^x$, ou $L. y = x. L. x$ (*fig.* 17). De l'équation $L. y = x L. x$, ou $1 \times L. y = x L. x$, l'on tire $1 : L. x :: x : L. y$. Pour décrire cette courbe, ayant décrit une logarithmique B L, on prendra une ordonnée B A (sur cette logarithmique) qu'on supposera = 1 (*), en faisant P M = x; alors A P sera = $L. x$, & prenant la ligne A B pour axe, si l'on fait A Q = P M, & qu'on tire Q R parallèle à B P jusqu'à la rencontre de l'axe A P de la logarithmique B L, on aura A R = $x L. x$; car les triangles semblables A B P, A Q R donnent A B : A P :: A Q = PM : A R, ou $1 : L. x :: x :$ A R = $x. L. x = L. y$. Menant donc Q N parallèle & égale à A R, le point N appartiendra à la courbe cherchée; on s'y prendra de même pour trouver d'autres points de cette courbe. Si on suppose $x = 0$, ce qui arrive au point C, alors $L. y = 0$, & 0 étant le logarithmique de 1 = A B, on aura A C = 1 = A B; donc la courbe passe par le point C. Si $x = 1$, $L. x = 0$, $L. y = 0$ & $y = 1$; donc l'appliquée B D au point B est = 1.

Revenons à notre problème. De l'équation $L. y = x L. x$, l'on tire $\frac{dy}{y} = dx. L. x + x. \frac{dx}{x}$, ou $dy = y L. x. dx + y dx$. Substituant cette valeur de dy dans la formule $\frac{y dx}{dy}$, l'on a la sous-tangente $= \frac{1}{L. x + 1} = \frac{1 \times 1}{L. x + 1}$ (**); c'est-à-dire,

(*) C'est-à-dire d'un pied, si l'on veut, d'un pouce, &c.

(**) Cette sous-tangente doit être prise, non sur l'axe A P

que la ſous-tangente eſt troiſiéme proportionnelle à AP + AB & AB.

30. PROBLÊME. *Trouver la ſous-tangente des ſpirales de tous les genres, dont l'équation* (*courb. tranſc.* 6) *eſt* $c^n y^m = r^m x^n$. *ſuppoſons que* An (*fig.* 18) *puiſſe repréſenter ces ſortes de courbes*; ayant tiré les rayons infiniment proches CB, Cp, & décrit du point C comme centre, l'arc infiniment petit nm avec le rayon Cn de la ſpirale, & ayant de plus mené la tangente NT, la ligne CT perpendiculaire à BC ſera la ſous-tangente cherchée.

En faiſant l'arc A$p = x$, le rayon Cn de la ſpirale $= y$, pB $= dx$, N$m = dy$; les ſecteurs ſemblables BCp, mCn, donnent C$p = r$: Cn $= y$ :: pB (dx) : $nm = \frac{y\,dx}{r}$. Cela poſé, l'arc nm étant cenſé égal à une ligne droite infiniment petite perpendiculaire ſur NC $= y$, les triangles rectangles NCT, Nnm ſont cenſés ſemblables, & donnent Nm (dy) : nm ($\frac{y\,dx}{r}$) :: NC (y) : CT $= \frac{yy\,dx}{r\,dy}$; mais l'équation $c^n \times y^m = r^m x^n$ donne $m c^n y^{m-1} dy = n r^m x^{n-1} \times dx$, $dx = \frac{m c^n y^{m-1} dy}{n r^m x^{n-1}}$. Subſtituant cette valeur de dx dans l'expreſſion de CT, l'on a CT $= \frac{m c^n y^{m+1}}{n r^m . r x^{n-1}} = \frac{m c^n y^{m+1} x}{n r^m x^n r}$ (en multipliant le nu-

de la logarithmique, mais ſur l'axe PB (des x) de la courbe propoſée; de ſorte que la tangente au point D eſt $=$ Di & non pas $=$ DT.

mérateur & le dénominateur par x) $= \frac{m r^m x^n y x}{n r^m x^n}$ (en ſubſtituant la valeur de $c^n y^m$) $= \frac{mxy}{nr}$.

Si $m = n = 1$, comme dans la ſpirale d'Archimèdes, dans laquelle l'on a $cy = rx$, la ſous-tangente ſera $= \frac{xy}{r}$, d'où l'on tire $r : x :: y :$ CT. Si $y = r$, ce qui arrive au point A, alors x eſt égal à la circonférence c du cercle générateur, & CT $= x = c$; donc on auroit géométriquement une ligne droite égale à la circonférence du cercle, & par conſéquent ſa quadrature, ſi on pouvoit mener géométriquement une tangente au point A de la ſpirale d'Archimède. Si $m = 5$, & $n = 3$, l'on a CT $= \frac{5xy}{3r}$, d'où l'on tire $3r : 5x :: y :$ CT; prenant donc une ligne quatriéme proportionnelle au triple du rayon, au quintuple de l'abſciſſe circulaire x & au rayon correſpondant de la ſpirale, ou aura la longueur de la ſous-tangente.

Si dans l'équation $c^n y^m = r^m x^n$, on ſuppoſe $n = -1$ & $m = 1$, on aura $\frac{y}{c} = \frac{r}{x}$, ou $yx = cr$. Subſtituant ces valeurs de m, n & yx dans $\frac{mxy}{nr}$, l'on a CT $= -c$; c'eſt-à-dire, que dans cette ſpirale la ſous-tangente eſt conſtante & égale à la circonférence du cercle générateur, ou à l'arc c, ſi c ne déſigne qu'une partie de cette circonférence. Le ſigne — ne changeant rien à la grandeur de la ſous-tangente $-c$, on pourra faire quelquefois dans la ſuite cette ſous-tangente $= c$.

Pour trouver la ſous-tangente de la ſpirale loga-

rithmique, je remarque que dans cette ſpirale, l'angle ACB ou l'arc AB $= x$, étant le logarithme du rayon correſpondant CN, l'on a (voyez les courbes tranſcendantes n°. 7) $x = n\,\text{L}.\frac{y}{c} = n.\,\text{L}.\,y$, en faiſant $c = 1$; donc $dx = n.\frac{dy}{y}$, & CT $= \frac{yydx}{rdy} = \frac{ny}{r}$; d'où l'on tire $r : n :: y :$ CT. Si $n = 1 = r$, CT ſera $= y$. Donc pour une autre ordonnée z, l'on aura la ſous-tangente $= \frac{nz}{r}$; donc ces deux ſous-tangentes ſeront entr'elles, comme les rayons y & z, & les deux triangles rectangles formés par les tangentes, ſous-tangentes & rayons correſpondans, ayant les côtés qui comprennent l'angle droit (ſavoir les ſous-tangentes & les rayons) proportionnels ſeront ſemblables, & par conſéquent les angles que forment les rayons avec les tangentes (ou, ce qui revient au même, avec la courbe) ſont égaux entr'eux; ce qui s'accorde avec ce qu'on a dit dans la premiere Partie, courbes tranſcendantes (7).

REMARQUE. On trouvera toujours la valeur de la ſous-tangente $\frac{yydx}{rdy}$ pour toutes les courbes, telles que les ordonnées partent d'un point fixe, pourvu qu'on puiſſe avoir une équation entre ces ordonnées y, & les arcs de cercle décrits d'un rayon $= r$ (qu'on pourra, ſi l'on veut, faire $= 1$), qui meſurent les angles que les ordonnées font avec une ligne donnée, ou avec l'ordonnée qui paſſe par le point d'où l'on commence à compter les abſciſſes circulaires.

31. PROBLÊME. BM (*fig.* 19) *étant supposée une courbe dont on puisse connoître la sous tangente*, CQ *pour un point quelconque* M, *trouver la soustangente* CT *de la courbe* bN, *en supposant qu'on connoît la relation entre les ordonnées* MC $= z$, *& les ordonnées* CN $= y$. Du point C avec les rayons z & y, décrivez les arcs infiniment petits Mr, Ns, tirez les autres lignes qu'on voit dans la figure, & faites CQ $= m$, quantité qui est censée connue. les triangles CQM, mMr ayant les angles C & r droits, & les angles M & m égaux(*), sont semblables. Donc CM : CQ :: mr : Mr, ou $z : m :: dz : Mr = \frac{m\,dz}{z}$; mais les secteurs semblables CMr, CNs donnent CM : CN :: Mr : Ns; ou $z : y :: \frac{m\,dz}{z} : Ns = \frac{my\,dz}{zz}$. Maintenant les triangles semblables N$n$$s$, NCT, donnent ns : Ns :: NC : CT, ou $dy : \frac{my\,dz}{zz} :: y : CT = \frac{myy\,dz}{zz\,dy}$.

Si on suppose que l'on ait toujours MN $= mn = b$, alors $y = z + b$; donc $dy = dz$ & CT $= \frac{myy}{zz}$ (**), qu'on construira ainsi; par les points M & Q, ayant tiré la tangente MQ, on lui menera par le point N la parallèle Ng; tirant ensuite gM, on menera NT parallèle à gM, & la

(*) Car ces angles diffèrent infiniment peu, à cause des points M & m infiniment proches.

(**) Car alors $\frac{dz}{dy} = 1$.

ligne

ligne C T sera la sous-tangente cherchée; car les triangles semblables C M q, C N g donnent C M (z) : Cq (m) :: CN (y) : C$g = \frac{my}{z}$. Les triangles semblables, C M g, C N T donnent C M : C g :: CN : CT, ou $z : \frac{my}{z} :: y : CT = \frac{myy}{zz}$.

Si la ligne MB est droite & qu'on fasse toujours MN $= ab = b$, l'on aura la conchoïde de Nicomède (voyez les courbes algébriques n°. 69).

Si l'on suppose que l'équation de la courbe Nb soit $y^M = z^n a^{M-n} = z^n a^r$, en faisant $M - n = r$, l'on aura $My^{M-1} dy = n a^r z^{n-1} dz$, $dz = \frac{My^{M-1} dy}{n a^r z^{n-1}}$. Substituant cette valeur de dz dans $\frac{myy\,dz}{zz\,dy}$, l'on a CT $= \frac{M.my.y^M}{nz a^r z^n} = \frac{M my\, a^r z^n}{nz a^r z^n} = \frac{M my}{nz}$. Si $M = 5$ & $n = 2$, l'on aura C T $= \frac{5\,my}{2z}$, d'où l'on tire $2z : 5m :: y :$ CT; c'est-à-dire, que la sous-tangente est alors quatrième proportionnelle au double de l'ordonnée C M, au quintuple de la sous-tangente Cq, & à l'ordonnée C N.

Application du calcul différentiel aux tangentes, sous-normales & normales, à la méthode de déterminer l'angle de la courbe avec une ligne parallèle aux abscisses ou aux ordonnées, & aux asymptotes des courbes.

32. Etant donnée la sous-tangente PT (fig. 1), par le point T extrémité de la sous-tangente &

le point m extrémité de l'ordonnée correspondante, on menera la ligne mT, qui sera évidemment la tangente cherchée ; car la position d'une ligne droite ne dépend que de deux points ; il suffit donc de déterminer la sous-tangente par la méthode précédente, ou par une autre méthode. Néanmoins pour déterminer la tangente par le calcul différentiel, je remarque que les triangles mnR, mPT étant semblables, l'on a $Rn : mn :: mP : mT$; mais $Rn = dy$, & $(mn)^2 = (mR)^2 + (nR)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ (*) ; donc $mn = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; donc $dy : \sqrt{(dx^2+dy^2)} :: y : mT = \frac{y}{dy}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, tangente cherchée que nous ferons $= t$. Si l'on substitue dans cette formule la valeur de dx^2, tirée de l'équation de la courbe, l'on aura la valeur de la tangente cherchée.

Dans la parabole dont l'équation est $y^2 = px$, l'on a $2y\,dy = p\,dx$, $dx = \frac{2y\,dy}{p}$, $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{p^2}$; donc l'on aura $t^2 = \frac{y^2dx^2 + y^2dy^2}{dy^2} = y^2 + \frac{y^2dx^2}{dy^2}$. Substituant maintenant la valeur de dx^2, que nous venons de trouver, il vient $t^2 = y^2 + \frac{4y^4}{p^2}$ $= px + \frac{4p^2x^2}{p^2} = px + 4xx$, en substituant la valeur de y^2 ; donc $t = \sqrt{px + 4xx}$.

Il sera cependant plus commode, ayant la va-

(*) On suppose ici que l'angle que font les ordonnées avec les abscisses, est droit.

leur de la ſous-tangente que je ſuppoſerai $=R$, de faire $t = \sqrt{(R^2 + y^2)}$ (*), & l'on trouvera la même valeur de la tangente. Par exemple, la ſous-tangente de la parabole étant $= 2x$, ainſi qu'on l'a dit ci-deſſus, l'on a $t = \sqrt{(4xx + yy)} = \sqrt{4xx + px}$.

Dans les paraboles des genres ſupérieurs, la ſous-tangente eſt $= \frac{(m+n)x}{n}$ (10) $= \frac{s.x}{n}$; en faiſant $m + n = s$; donc $R^2 = \frac{s^2x^2}{n^2}$, & $t = \sqrt{(\frac{s^2x^2}{n^2} + y^2)}$, expreſſion dans laquelle on peut, ſi l'on veut, ſubſtituer la valeur de y^2.

Dans la ſpirale d'Archimède, la ſous-tangente eſt $= \frac{xy}{r}$ (30); donc $t^2 = \frac{xxyy}{r^2} + y^2 = \frac{xxyy + r^2y^2}{r^2}$. Or dans cette ſpirale $cy = rx$, $y = \frac{rx}{c}$, $y^2 = \frac{r^2x^2}{c^2}$; donc $t^2 = \frac{x^4 + r^2x^2}{c^2}$, & $t = \sqrt{(\frac{x^4 + r^2x^2}{c^2})}$. Dans la ſpirale hyperbolique $R = c$; donc $t = \sqrt{c^2 + y^2}$. Dans la ſpirale logarithmique $R = \frac{ny}{r}$ (30) $= ny$, en faiſant $r = 1$; donc $t = \sqrt{nnyy + y^2} = \sqrt{2y^2}$, en ſuppoſant $n = 1$. Dans la logarithmique la ſous-tangente eſt $= a$ (21); donc $t = \sqrt{aa + yy}$.

(*) t eſt l'hypothénuſe d'un triangle rectangle, dont R & y ſont les côtés. On voit bien que nous ſuppoſons que l'on a trouvé R, dans la ſuppoſition que l'angle des co-ordonnées eſt droit.

33. PROBLÊME. *Trouver la formule générale de la sous-normale* PL (*) *dans une courbe algébrique* (*fig.* 1). Les triangles mnR, PmL ayant leurs côtés perpendiculaires (**), sont semblables ; donc $mR : nR :: mP : PL$, ou $dx : dy :: y : PL = \frac{y\,dy}{dx}$. Si dans cette valeur on substitue la valeur de dx, ou celle de dy prise de l'équation à la courbe, l'on aura la sous-normale que nous appellerons u, exprimée en termes finis.

Dans la parabole, l'on a $y^2 = ax$, $2y\,dy = a\,dx$, $dy = \frac{a\,dx}{2y}$. Substituant cette valeur dans $u = \frac{y\,dy}{dx}$, l'on aura $u = \frac{ay}{2y} = \frac{a}{2}$; c'est-à-dire, que dans la parabole la sous-normale est constante & égale à la moitié du paramêtre.

Dans les paraboles des genres supérieurs, l'on a (10) $dx = \frac{(m+n)y^{m+n-1}dy}{na^m x^{n-1}}$. Substituant cette valeur dans u, ou, ce qui revient au même, divisant $y\,dy$ par cette quantité, il vient $u = \frac{na^m x^{n-1}y}{(m+n)y^{m+n-1}} = \frac{na^m x^n y^2}{(m+n)xy^{m+n}}$ (en multipliant tout, c'est-à-dire, le numérateur & le dénominateur par xy) $= \frac{nyy.y^{m+n}}{(n+m)xy^{m+n}}$

(*) La *sous-normale* est la partie de l'axe comprise entre l'ordonnée Pm, & la rencontre de la normale ou perpendiculaire mL à la tangente.

(**) On suppose l'angle des ordonnées droit.

(en substituant la valeur de $a^m x^n$) $= \frac{ny^2}{(n+m)x}$. Si $n = m = 1$, comme dans la parabole vulgaire, l'on a $u = \frac{y^2}{2x} = \frac{ax}{2x} = \frac{a}{2}$, a est le paramêtre. Si $n = 7$ & $m = 3$, u sera $= \frac{7yy}{10x}$; d'où l'on tire $10x : 7y :: y : u$.

Dans les courbes dans lesquelles $y^m x^n = a^{m+n} = 1$ (*), en faisant $a = 1$, ou $y^m = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$, ou $y = x^{-\frac{n}{m}} = x^r$ (en faisant $-\frac{n}{m} = r$), l'on a $dy = rx^{r-1}dx$; substituant cette valeur de dy dans $\frac{ydy}{dx}$, il vient $u = ryx^{r-1} = \frac{ryx^r}{x} = \frac{ryy}{x}$ (à cause de $y = x^r$). Si $m = 2$ & $n = 10$, l'on a $r = -5$ & $u = -\frac{5yy}{x}$. Ainsi dans ces courbes la sous-normale PL étant négative (fig. 2) doit être prise en allant vers l'origine A des abscisses.

Dans l'ellipse, en comptant les abscisses depuis le centre, l'on a $y^2 = \frac{bb}{aa} \times (aa - xx)$, $2ydy = -\frac{2bbxdx}{aa}$, $dy = \frac{-bbxdx}{yaa}$, $u = \frac{ydy}{dx}$

(*) Toutes les courbes dans lesquelles le produit d'une puissance positive de l'ordonnée, par une puissance positive de l'abscisse, est égal à une quantité constante, sont appellées hyperboles.

$= -\frac{bbx}{aa}$ (*). Dans le cercle $b = a$, & $u = -x$; c'eſt-à-dire, que la ſous-normale du cercle eſt égale à l'abſciſſe comptée depuis le centre.

REMARQUE. En appellant la ſous-tangente R, l'on a (par la propriété du triangle rectangle T m L) (fig. 1) T P : m P :: m P : P L, ou R : y :: y : $u = \frac{yy}{R}$. Connoiſſant donc la ſous-tangente, on aura facilement la ſous-normale; de plus la formule $\frac{yy}{R}$ ſervira également pour les courbes dont les ordonnées partent d'un point : mais alors on prend la ſous-normale C L (fig. 18) ſur le prolongement de la ſous-tangente T C.

Dans la courbe dont l'équation eſt $y = x^x$ (fig. 17) la ſous-tangente R étant (29) $= \frac{1}{1 + L.x}$, l'on a $u = \frac{yy(1 + L.x)}{1}$, d'où l'on tire $1 : yy :: 1 + L.x : u$, ou (à cauſe de $y = x^x$, ce qui donne $y^2 = x^{2x}$) $1 : x^{2x} :: 1 + L.x : u$.

Dans la courbe dont l'équation eſt $y = b.\, a\,fin.\, x$, la ſous-tangente R eſt (28) $= a\,fin.\, x \sqrt{(1 - xx)}$, $\frac{y^2}{R} = \frac{b.\, a\,fin.\, x.}{\sqrt{(1 - xx)}}$; d'où l'on tire $\sqrt{(1 - xx:)}\; b :: a\,fin.\, x : u$.

Dans les ſpirales de tous les genres, dans leſquelles la ſous-

(*) Le ſigne — indique qu'il faut prendre la ſous-normale P L (fig. 4), en allant vers l'origine C des abſciſſes, au lieu qu'en comptant les abſciſſes depuis l'origine A du diamètre, on la prendroit en s'éloignant de cette origine; mais dans l'hyperbole, dont l'équation eſt $y^2 = \frac{bb}{aa} \times (x^2 - a^2)$, on aura $u = \frac{bbx}{aa}$; donc alors il faudra prendre u, en s'éloignant de l'origine des x.

tangente C T (fig. 18) eſt (30) $= \frac{mxy}{nr}$; l'on a $\frac{yy}{R}$ $= \frac{nryy}{mxy} = \frac{nry}{mx}$. Si $m = 3$ & $n = 7$, l'on a $u = \frac{7ry}{3x}$, ou $3x : 7r :: y : u =$ C L. On trouveroit la même choſe, ſi au lieu de diviſer y^2 par la ſous-tangente exprimée en termes finis, l'on diviſoit par la ſous-tangente $\frac{yydx}{rdy}$ (ce qui convient dans ce cas), pour avoir $u = \frac{rdy}{dx}$, d'où l'on tireroit la même valeur; mais lorſqu'on a R en termes finis, il eſt inutile d'employer le calcul différentiel.

Dans la ſpirale hyperbolique, l'on a (30) $R = c$; donc $u = \frac{yy}{c}$, ou $c : y :: y : u$. Dans la ſpirale logarithmique (30) $R = \frac{ny}{r}$; donc $u = \frac{ry}{n}$, ou $n : r :: y : u$. Si $n = r = 1$, l'on a $u = y$; mais alors (30) $R = y$; donc dans ce cas la ſous-normale eſt toujours égale à la ſous-tangente.

REMARQUE. La ſous-tangente des courbes algébriques qui ont leurs ordonnées parallèles, eſt $= \frac{ydx}{dy}$, ainſi qu'on l'a vu ci-deſſus. Si on diviſe y^2 par cette quantité, l'on aura $u = \frac{ydy}{dx}$ (*), comme ci-deſſus.

34. PROBLÊME. *Trouver l'expreſſion générale de la normale dans une courbe algébrique dont les ordonnées ſont perpendiculaires aux abſciſſes.* Les triangles ſemblables mnR, mPL (fig. 1) donnent $mR : mn :: mP : mL$, ou $dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} :: y : mL = \frac{y}{dx} \times \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

(*) Cette formule ſuppoſe que la courbe eſt rapportée à l'axe.

Dans la parabole $y^2 = px$, $2y\,dy = p\,dx$, $dy = \frac{p\,dx}{2y}$, $dy^2 = \frac{pp\,dx^2}{4yy}$; donc $mL = \frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2 + \frac{pp\,dx^2}{4y^2})} = \frac{y\,dx}{dx} \times \sqrt{(\frac{4yy+pp}{4y^2})} = \frac{y}{2y}\sqrt{(4yy+pp)} = \frac{1}{2} \times \sqrt{(4px+pp)}$.

Il est évident qu'en appellant la sous-normale u, l'on aura la normale $M = \sqrt{(uu+yy)}$, ce qui est général pour toutes les courbes, & même celles dont les ordonnées partent d'un même point.

Dans la spirale hyperbolique, l'on a (33) $u = \frac{yy}{c}$; donc $M = \sqrt{(\frac{y^4}{c^2} + y^2)} = \sqrt{(\frac{y^4 + c^2y^2}{c^2})} = \frac{y}{c}\cdot\sqrt{(4y^2 + c^2)}$, d'où l'on tire $c : y :: \sqrt{(4y^2 + c^2)} : M$.

Il est évident qu'ayant la sous-normale P L (fig. premiere), il suffit de mener (par l'extrémité L de la sous-normale & l'extrémité m de l'ordonnée correspondante) la ligne mL, qui sera la normale de la courbe Am.

REMARQUE I. La formule de la sous-normale $\frac{y\,dy}{dx}$ suppose que l'angle des ordonnées est droit. S'il étoit oblique, on changeroit (courbes algébriques 5) l'équation de la proposée en une autre, dans laquelle cet angle feroit droit, & l'on auroit ensuite facilement la sous-normale.

REMARQUE II. Nous n'avons appliqué la formule de la sous-tangente qu'aux courbes dont on a l'équation en termes finis, pour faire voir son usage dans les courbes dont l'équation renferme des différentielles, soit proposé de trouver la sous-tangente de la

courbe dont l'équation est $dx = \frac{-dy\sqrt{(aa-yy)}}{y}$ (*); donc $\frac{ydx}{dy} = -\sqrt{(aa-yy)}$. Mais la sous-tangente est $= \frac{ydx}{y}$; donc dans cette courbe, la sous-tangente $= -\sqrt{(aa-yy)}$. Maintenant, parce que le quarré de la tangente est égal à la somme des quarrés de l'ordonnée & de la sous-tangente, & que le quarré de la sous-tangente est $= aa - yy$ (**), l'on a le quarré de la tangente $= yy + aa - yy = aa$, & la tangente $= a$; donc dans cette courbe la tangente est constante.

Supposons une autre courbe dont l'équation soit $2aydx = dy(aa-yy)$, dont on demande la sous-tangente. Donc $\frac{ydx}{dy} = \frac{aa-yy}{2a}$, d'où l'on tire $2a : a+y :: a-y :$ R sous-tangente cherchée.

Soit l'équation de la courbe $3xdy = dx \times (\frac{aa-xx}{y})$ dont on demande la sous-normale u. L'on aura donc $\frac{ydy}{dx} = \frac{aa-xx}{3x}$; ainsi $3x : a + x :: a - x : u$.

35. PROBLÊME. *Trouver l'expression de la ligne* AT *comprise entre l'origine* A *des abscisses & la rencontre de la tangente* (*fig. 1*). Si

(*) Nous appellerons cette courbe *tractrice*, nous en donnerons la construction dans la suite de cet Ouvrage.

(**) On met $aa-yy$ au lieu de $-(aa-yy)$, parce que le quarré d'une quantité négative $-b$ est $= b^2$.

de P T l'on retranche A P, l'on aura A T $= \frac{y\,dx}{dy} - x = \frac{y\,dx - x\,dy}{dy}$. Pour avoir l'expression de A B, on fera P m : P T :: A T : A B, ou $\frac{y\,dx}{dy} : y :: \frac{y\,dx - x\,dy}{dy}$, $\frac{y\,dx - x\,dy}{dx}$ = A B.

36. PROBLÊME. *étant donnée une courbe* A m *(dans laquelle l'angle des co-ordonnées est droit), trouver le point auquel cette courbe fait un angle donné avec une ligne parallèle aux abscisses ou aux ordonnées (fig. 1).* L'angle nmR est l'angle que fait la ligne m R parallèle aux abscisses avec la courbe ou avec la tangente à la courbe au point m, & l'angle mn R est l'angle que fait la courbe avec l'ordonnée correspondante pn. Or le triangle rectangle mn R donne (Voyez la Géométrie) m R : nR :: r (rayon) : tangente de l'angle nm R = T, ou en faisant $r = 1$, $dx : dy :: 1 : T = \frac{dy}{dx}$. Le même triangle donne $dy : dx :: 1 : t = \frac{dx}{dy}$, tangente de l'angle R$nm$. Il suffit donc d'égaler ces formules à la tangente de l'angle donné, pour en déduire ensuite, par le moyen de l'équation de la courbe, la valeur de l'ordonnée ou de l'abscisse correspondante.

Si l'on demande, par exemple, à quel point de la parabole l'angle que forme la courbe avec une ligne parallèle à l'axe est de 45°. Comme la tangente de 45° est égale au rayon = 1, l'on a $\frac{dy}{dx} = 1$, $dy = dx$. Or par la nature de la parabole, $yy = px$, $2y\,dy = p\,dx$; & parce que par la nature du problême dy doit être $= dx$, l'on

a $2y\,dx = p\,dx$, $2y = p$, $y = \frac{p}{2}$. Mais (Sections coniques 8) l'ordonnée qui passe par le foyer est égale au demi-paramêtre; donc dans toutes les paraboles, l'angle de la courbe avec une ligne parallèle à l'axe, est de 45° au point correspondant au foyer.

Si l'on demande à quel point la tangente de l'angle de la courbe & de l'ordonnée sera égale au demi-rayon $= \frac{1}{2}$ dans la même parabole. L'on aura $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}$, $2\,dx = dy$. Or par la nature de la parabole $yy = px$, $2y\,dy = p\,dx$. Substituant dans cette équation la valeur $2\,dx$ de dy, l'on trouvera $4y\,dx = p\,dx$, $4y = p$, $y = \frac{p}{4}$. Substituant cette valeur de y dans l'équation $yy = px$, l'on a $\frac{pp}{16} = px$, $\frac{p}{16} = x$; donc cela arrivera au point correspondant à une abscisse egale à la seiziéme partie du paramêtre.

Si l'on demande à quel point de l'hyperbole équilatère la tangente de l'angle de la courbe avec l'ordonnée sera $= 1$, 1 étant le rayon. Dans ce cas $\frac{dx}{dy} = 1$, $dx = dy$. L'équation à l'hyperbole équilatère étant $yy = 2ax + xx$, l'on a $2y\,dy = 2a\,dx + 2x\,dx$, ou (parce que par la nature du problême $dx = dy$) $2y\,dx = 2a\,dx + 2x\,dx$, ou $y = a + x$. Substituant cette valeur de y dans l'équation de la courbe, l'on a $(a+x)^2 = 2ax + xx$, ou $aa + 2ax + xx = 2ax + xx$, ou $aa = 2ax + xx - 2ax - xx = 0$, ce qui ne peut être; donc l'hyperbole

équilatère ne fait nulle part un angle de 45 degrés avec une ligne parallèle à l'axe des ordonnées.

Si l'on demande à quel point l'angle de la courbe avec une ligne parallèle à l'axe des abscisses sera de 45° dans la courbe dont l'équation est $yy = 2ax + 2xx$, l'on aura $\frac{dy}{dx} = 1$, & par la nature de la courbe $2ydy = 2adx + 4xdx$; donc $\frac{dy}{dx} = \frac{2a + 4x}{2y} = 1$, $2y = 2a + 4x$, $4y^2 = (2a + 4x)^2$, ou (en substituant la valeur de yy) $4(2ax + 2xx) = (2a + 4x)^2$, ou $8ax + 8xx = 4aa + 16ax + 16x^2$; ou transposant & réduisant, $8x^2 + 8ax = -4aa$, $xx + ax = -\frac{1}{2}aa$; & en complétant le premier membre, $x^2 + ax + \frac{aa}{4} = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}aa = -\frac{aa}{4}$. Prenant les racines, l'on a $x + \frac{1}{2}a = \pm\frac{1}{2} \times \sqrt{(-aa)}$, quantité imaginaire, qui fait voir que la courbe proposée ne peut faire nulle part un angle de 45° avec une ligne parallèle aux abscisses.

REMARQUE. Si dx étoit supposé infiniment plus petit que dy, la tangente $\frac{dx}{dy}$ seroit infiniment petite, & alors l'ordonnée seroit parallèle à la tangente au point cherché & se confondroit avec elle, comme cela arrive à l'origine A de la parabole (figure premiere). Si au contraire dy étoit infiniment plus petit que dx, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ seroit alors infiniment petite, la tangente de l'angle de la courbe avec une ligne

parallèle à l'axe des x, ou avec l'axe des x feroit infiniment petite; mais cet angle étant infiniment petit, cette tangente feroit cenfée ne rencontrer l'axe qu'à une diftance infinie; la fous-tangente feroit cenfée infinie, & la tangente parallèle à l'axe des abfciffes : c'eft ce qui arrive en M extrémité du quart de cercle A M (fig. 4). A cette occafion, l'on peut remarquer que tandis que dy a quelque grandeur, la tangente rencontre quelque part l'axe P T des abfciffes, & que la fous-tangente P T eft infinie lorfque l'angle T eft infiniment petit. Mais parce que l'on conçoit que la tangente mT (il en eft de même de la fous-tangente) n'a pas diminué, lorfqu'elle eft entierement devenue parallèle à l'axe, on dit qu'elle eft alors infinie; en effet lorfque cette tangente devient ainfi parallèle, dy devient de plus en plus petit, il devient même abfolument $= 0$, & la formule $\frac{dy}{dx}$ devient $= 0$. Ainfi cette expreffion indique que la tangente eft parallèle aux abfciffes; mais l'expreffion $\frac{dy}{0}$, indique que la tangente eft parallèle aux ordonnées. Néanmoins nous ne prétendons pas que l'on puiffe divifer quelque chofe par le o pur; ainfi il faut entendre cela dans le fens que nous venons de l'expliquer (*).

(*) C'eft ce qu'on pourra concevoir plus facilement, en faifant attention que les deux ordonnées C M, pN font cenfées n'avoir aucune différence, & aboutiffent toutes les deux à la ligne M D, avec laquelle l'arc M N eft cenfé fe confondre. Pour marquer que dy eft infiniment plus petit que dx, ou réciproquement, nous exprimerons dy par o dans le premier cas, & dx par o dans le fecond cas.

Si l'on demande dans quel point de la courbe la tangente eſt parallèle aux abſciſſes, il eſt évident qu'on trouvera ce point en ſuppoſant $dy = 0$ dans la fraction $\frac{dy}{dx}$. Si au contraire l'on demande dans quel endroit la tangente eſt parallèle aux ordonnées, il ſuffira de faire la valeur de la fraction $\frac{dx}{dy} = 0$, ou ce qui revient au même, de ſuppoſer $dx = 0$. Donc ſi l'on ſuppoſe $\frac{dx}{dy} = \frac{a}{b}$, l'on aura une tangente parallèle aux ordonnées lorſqu'on aura le numérateur $= 0$, & une tangente parallèle aux abſciſſes, lorſque le dénominateur ſera $= 0$.

37. PROBLÊME. *A quel point de la parabole la tangente eſt parallèle aux ordonnées.* Dans la parabole, l'on a $y^2 = px$, $2y\,dy = p\,dx$, $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$. Si l'on ſuppoſe le numérateur $2y = 0$, l'on aura $y = 0$; & ſubſtituant cette valeur dans l'équation $yy = px$, l'on a $0 = px$, $x = \frac{0}{p} = 0$. Donc dans la parabole, la tangente eſt parallèle aux ordonnées à l'origine des abſciſſes, ou au point auquel $x = 0$. Mais comme on ne peut pas ſuppoſer le dénominateur $p = 0$, il n'y a aucun point dans la parabole auquel la tangente ſoit parallèle aux abſciſſes.

Dans le cercle, l'on a $y^2 = 2ax - xx$, $y = \sqrt{(2ax - xx)}$, $2y\,dy = 2a\,dx - 2x\,dx$,

$y\,dy = (a - x)\,dx$, $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{a-x} = \frac{\sqrt{(2ax - xx)}}{a - x}$.

Si l'on suppose le numérateur $= 0$, l'on a $\sqrt{(2ax - xx)} = 0$; & en élevant au quarré, $2ax - x^2 = 0$, ou en changeant les signes, $x^2 - 2ax = -0$, ou en complétant le premier membre, $x^2 - 2ax + aa = 0 + a^2 = a^2$; & en prenant les racines, l'on a $x - a = \pm \sqrt{aa} = \pm a$, $x = a \pm a$, ou $x = 2a$, & $x = 0$. Donc la tangente du cercle est parallèle aux ordonnées, aux extrémités du diamêtre. Si l'on suppose le dénominateur $= 0$, l'on a $a - x = 0$, $a = x$; donc la tangente du cercle est parallèle aux abscisses au point qui répond à l'abscisse $x = a$, c'est-à-dire, au point qui répond au centre. Venons aux asymptotes (*).

38. *Une asymptote* est une ligne droite qu'on peut regarder comme la tangente d'une courbe à une distance infinie; de sorte que lorsque la distance de l'asymptote à la courbe est plus petite qu'aucune quantité donnée, on peut la regarder comme nulle. Mais cela ne suffit point pour qu'une telle ligne soit asymptote, il faut encore qu'on puisse déterminer sa position de maniere que la distance de cette ligne à l'origine de la courbe soit finie. Parmi les asymptotes, les unes sont parallèles aux abscisses, les autres aux ordonnées. Pour avoir une asymptote parallèle aux abscisses, il est nécessaire 1°. qu'en supposant x (positif ou négatif) infini dans la valeur de $\frac{dx}{dy}$, ou

(*) Il s'agit ici des asymptotes rectilignes, on a parlé assez au long des asymptotes courbes dans la premiere Partie.

dans la raison de $dx : dy$, dy, soit $= 0$, ou si l'on veut infiniment plus petit que dx. 2°. Que y soit fini ou $= 0$. Si $y = 0$, la ligne des x est elle-même asymptote. Si y est fini & $= b$, par exemple, la ligne parallèle à l'axe des x & éloignée de cet axe de la quantité b, sera asymptote. De même pour avoir une asymptote parallèle aux ordonnées, il faut que dans la supposition de $\pm y$ infini, la valeur de $\frac{dx}{dy}$ soit $= 0$, ou que dx soit supposé infiniment plus petit que dy, & que x dans cette supposition soit $= 0$, ou fini. Si en supposant $\pm x$ infini, la valeur de $\frac{dx}{dy}$ est finie, on connoîtra l'angle que forme l'asymptote avec l'axe des x; mais pour que la ligne ainsi déterminée soit asymptote, il faut que la partie de l'axe (prolongé s'il le faut) comprise entre l'origine des x, & la rencontre de l'axe par cette ligne, soit finie. C'est pourquoi cherchant la soustangente d'un point infiniment éloigné, & de cette sous-tangente retranchant l'abscisse, si ce qui reste est fini ou $= 0$, la ligne menée par ce point sous l'angle déterminé, sera l'asymptote de la courbe.

39. PROBLÊME. *Trouver les asymptotes de la courbe mn (fig. 20), dont l'équation, en supposant les abscisses* AP $= x$, *les ordonnées* P$n = y$, *est* $yx = ax + ab$, ou $y = a + \frac{ab}{x}$. En supposant $x = \infty$, le terme $\frac{ab}{x}$ disparoît devant a, & l'on a $y = a$. Mais en différentiant l'équation de la courbe, on trouve $ydx + xdy = adx$, ou $ydx - adx$

$-p\,dx = -x\,dy$, $\frac{dx}{dy} = \frac{-x}{y-a}$. Si l'on ſuppoſe $dy = 0$, l'on a, ainſi qu'on l'a vu ci-deſſus, une tangente parallèle aux abſciſſes ; mais en faiſant le dénominateur $y - a = 0$, l'on a $y = a$. Donc prenant AD $= a$, & par le point D menant DF parallèle à AB, la ligne DF ſera aſymptote de la courbe. Si l'on ſuppoſe $y = \infty$, dans cette ſuppoſition l'équation $y = a + \frac{ab}{x}$ ne peut avoir lieu qu'en ſuppoſant $x = \frac{1}{\infty}$, & alors le terme a diſparoît devant $\frac{ab}{x}$, qui eſt infiniment grand. Mais ſi dans la formule $\frac{dx}{dy} = \frac{-x}{y-a}$, on ſuppoſé le numérateur $= 0$, l'on a $-x = 0$, & $x = 0$. Ainſi nous avons une tangente parallèle aux ordonnées, & qui paſſe par le point correſpondant à $x = 0$; donc ſi par le point A, origine des x, on tire la ligne AC parallèle aux ordonnées, cette ligne ſera encore aſymptôte.

40. PROBLÊME. *Trouver les aſymptotes de l'hyperbole dont l'équation, en ſuppoſant le premier axe* $= a$ *& le paramètre de cet axe* $= p$, *eſt* $y^2 = \frac{p}{a} \times (ax + xx)$ *ou* $y^2 = \frac{p}{a} xx$, *en ſuppoſant* $x = \infty$(*).

L'on a donc $y = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a}}\, x$, $dy = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a}} \cdot dx$;

(*) Dans cette ſuppoſition, ax diſparoît par rapport à xx.

$\sqrt{a}.dy = \sqrt{p}.dx$, $\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{p}}$. Et parce que l'on ne peut ſuppoſer ni a ni $p = 0$, la courbe n'a aucune aſymptote parallèle aux ordonnées ou aux abſciſſes; mais la ligne qui fait avec l'axe un angle dont la tangente $\frac{dy}{dx}$ eſt $= \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a}}$, eſt cenſée tangente de la courbe à une diſtance infinie. Pour découvrir ſi cette ligne eſt aſymptôte, je cherche la ſous-tangente de l'hyperbole, que l'on trouve (10) $= \frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x}$; d'où retranchant x, il vient $\frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} - x$. $= \frac{ax + xx - \frac{1}{2}ax - xx}{\frac{1}{2}a + x} = \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x}$ $=$ TA (fig. 21) qui, dans la ſuppoſition de x infini, devient $= \frac{\frac{1}{2}ax}{x} = \frac{1}{2}a$; donc la ligne cherchée paſſe par le point C, milieu de l'axe. Pour déterminer un autre point B de cette ligne CB, je remarque que le triangle CAB étant rectangle, l'on a le coſinus de l'angle C : *ſin.* C :: CA $= \frac{a}{2}$: AB, ou parce que $\frac{ſin.\ C}{coſ.\ C} = tang.\ C = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a}}$, $\sqrt{a} : \sqrt{p} :: \frac{1}{2}a : AB = \frac{1}{2}a . \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\sqrt{ap}$. Or en ſuppoſant le ſecond axe $= b$, on auroit le paramètre du premier, en faiſant (Voyez les Sections coniques) $a : b :: b : p$, ou $bb = ap$, $b = \sqrt{ap}$ & $\frac{b}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{ap}$; donc en menant par le point A

la ligne AB perpendiculaire au premier axe, & faiſant cette ligne égale à la moitié du ſecond axe, tirant enſuite par les points C & B la ligne CB, cette ligne ſera aſymptote de l'hyperbole.

41. PROBLÊME. *Déterminer les aſymptotes de la courbe dont l'équation eſt* $xy^2 + yx^2 = bx^2 + b^3$. Cherchant la valeur de y en x, je trouve $y^2 + xy = bx + \frac{b^3}{x}$. Complétant le premier membre, j'ai $y^2 + xy + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4} + bx + \frac{b^3}{x}$; d'où je tire aiſément, en prenant les racines & tranſpoſant, $y = -\frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{xx}{4} + bx + \frac{b^3}{x}\right)}$. Donc dans la ſuppoſition de x infini, les deux valeurs de y ſeront $y = b$, & $y = -x$ (*). Dif-

(*) En prenant la racine de la quantité ſous le ſigne, le premier terme ſera $\frac{x}{2}$. Si l'on diviſe le ſecond terme par le double du premier, ſelon la méthode ordinaire, c'eſt-à-dire ſi l'on diviſe bx par x, l'on a le ſecond terme b de la racine. Multipliant b par x & ajoutant le quarré de b pour le retrancher auſſi bien que bx de la quantité qui eſt ſous le ſigne, il reſte $\frac{b^3}{x} - bb$. Continuant l'opération, on trouve des quatités infiniment plus petites que b; ainſi on peut les négliger. On peut auſſi concevoir cela de cette autre maniere. A cauſe de $x = \infty$, le terme $\frac{b^3}{x}$ diſparoît devant les autres, & ajoutant bb, ce qui eſt permis dans ce cas, car une quantité finie ajoutée à une quantité infinie n'eſt pas cenſée augmenter la racine de celle-ci, l'on aura $\frac{xx}{4} + bx + bb$, dont la racine eſt $\frac{x}{2} + b$.

férenciant maintenant l'équation proposée & transposant, il vient $2xydy + x^2 dy = 2bxdx - y^2 dx - 2yxdx$, ou $dx : dy :: 2xy + xx : 2bx - yy - 2yx$. Supposant x infini, & prenant la premiere valeur de y, on trouve $dx : dy :: xx : -bb :: \infty : -bb$, c'est-à-dire, comme une quantité infinie à une quantité finie ; donc puisqu'on peut regarder bb comme o par rapport à xx, l'on peut supposer $dy = 0$; donc on a à l'infini, une tangente parallèle à la ligne des abscisses. C'est pourquoi, si ayant pris A F (fig. 22) pour la ligne des abscisses, & ayant supposé A B $= b$, on fait le quarré A B C D, la droite D C M sera tangente de la courbe à l'infini, & sera une asymptote. Si l'on prend la seconde valeur de y, l'on aura $dx : dy :: 1 : -1$, c'est-à-dire que dy sera $= -dx$; donc ayant supposé B G $= b =$ A B, on menera A G (l'on mene B G du côté opposé à cause du signe $-$), & la tangente d'un point infiniment éloigné sera parallèle à A G. Pour savoir si cette parallele est une asymptote, je cherche la sous-tangente $\frac{ydx}{dy}$, qui dans ce cas est $= \frac{2xyy + yxx}{2bx - yy - 2xy}$, d'où retranchant x, il vient $\frac{3xyy + 3yx^2 - 2bx^2}{2bx - y^2 - 2xy}$, qui, dans la supposition de x infini & de $y = -x$, devient $= -2b$; c'est pourquoi prenant A F $= 2b$, si par le point F on mene F R parallèle à A G, l'on aura une asymptote de la courbe. En supposant $x = 0$, l'on trouvera y infini, & la raison de $dx : dy$ pourra être regardée comme plus petite qu'aucune quantité donnée. Donc si par le point A on mene P Q parallèle aux ordonnées, cette ligne sera asymptote de la courbe. Si on suppose $-x$ infini, on trouvera par la même méthode que les lignes M D, R C prolongées du côté de N & de S, sont aussi asymptotes.

42. PROBLÈME. *Déterminer si la courbe dont l'équation est $a^{m-n} x^n + x^m = y^m$ (n étant plus petite que m) a des asymptotes ou non.* Ayant différencié l'équation de la courbe, l'on trouve $dx : dy :: my^{m-1} : na^{m-n} x^{n-1} + mx^{m-1}$; c'est pourquoi puisqu'en supposant x infini, il vient $y = x$, l'on a en substituant la valeur de y & divisant ensuite les deux termes de la seconde raison par x^{m-1}, l'on a, dis-je, $dx : dy :: mx^{m-m} : na^{m-n} + mx^{m-m}$;

$m x^{m-n}$: (la quantité $n a^{m-n}$ s'évanouissant dans cette supposition) : $m x^{m-n}$; ainsi $dx = dy$ & $x = y$. C'est pourquoi en supposant que A B (fig. 23) est la ligne des abscisses dont A soit l'origine (*) , si on mene B C parallèle aux ordonnées , & $=$ A B, & qu'on tire A C , cette ligne sera censée toucher la courbe à l'infini. Pour savoir si cette ligne est asymptote , je cherche la sous-tangente & j'en retranche x, pour avoir $\frac{m y^m - n a^{m-n} x^n - m x^m}{n a^{m-n} x^{n-1} + m x^{m-1}}$.

Substituant la valeur de y^m prise de l'équation de la courbe, & réduisant , l'on trouve $\frac{(m-n) a^{m-n} x}{n a^{m-n} + m x^{m-n}}$. Si $m - n < 1$ dans la supposition de x infini, cette formule a une valeur infinie, & la ligne interceptée entre l'origine des x, & la tangente est infinie; donc la courbe n'a point d'asymptote. Si $m - n = 1$, dans la même supposition de x infini, la formule devient $= \frac{a}{m}$. C'est pourquoi ayant pris A D $= \frac{a}{m}$, & mené D P parallèle à A C, elle sera asymptote de la courbe. Si $m - n > 1$, la formule ayant une valeur infiniment petite, ou, si l'on veut, étant $= 0$, la ligne A C elle-même sera asymptote de la courbe. Si m est un nombre pair, à x supposé infini, répondront deux valeurs égales de y, l'une positive, l'autre négative. Il est donc évident que de l'autre côté de l'abscisse A B, il y aura une autre asymptote qui fera le même angle avec l'axe des x. Cette derniere asymptote n'aura pas lieu, si m est un nombre impair. Si on suppose $-x$ infini, on prouvera par un raisonnement semblable que les lignes D P, A M prolongées du côté de Q & de N, sont asymptotes de la courbe.

(*) Dans cet exemple, on prend les x positifs du côté gauche, ce qui est très-permis.

Des asymptotes des courbes dont les ordonnées partent d'un point qu'on appelle foyer.

43. Si dx étant un arc infiniment petit (mn), décrit avec le rayon ou l'ordonnée $y = Cm$ (fig. 24), la raison de $dx : dy = Rn$ est infinie, ou, ce qui revient au même, si la raison de $dy : dx$ est plus petite qu'aucune quantité donnée, ce qui arrive en i ; il est évident que la tangente de la courbe sera alors parallèle à la sous-tangente de la même courbe, ou, ce qui revient au même, sera perpendiculaire à l'ordonnée correspondante, & que la courbe est touchée dans ce point par un cercle dont le rayon $= y$. C'est pourquoi pour trouver les points dans lesquels la sous-tangente fait un angle droit avec l'ordonnée, il suffit de faire $dy = 0$; par cette supposition, on déterminera la valeur de l'ordonnée y, à laquelle la tangente est perpendiculaire. Par exemple, si l'équation d'une courbe rapportée au foyer est $dx = \frac{b\,dy}{\sqrt{(bb - yy)}}$; faites $dy = 0$, & vous aurez $dx = \frac{0}{\sqrt{(bb-yy)}} = 0$, ou $dx\sqrt{(bb-yy)} = 0$; ou $\sqrt{(bb-yy)} = 0$, $bb - yy = 0$, $bb = yy$, & $y = b$; donc la tangente est perpendiculaire à l'ordonnée au point où cette ordonnée est $= b$. Si au contraire on suppose $dx = 0$, dans ce cas l'ordonnée devient tangente de la courbe, dumoins toutes les fois que cette ordonnée est finie ; car si l'ordonnée est infinie, il peut arriver que l'ordonnée elle-même ne soit pas tangente de la courbe dans un point infiniment éloigné, mais qu'une ligne parallèle à l'ordonnée soit alors l'asymptote de la courbe. Pour le faire concevoir, soit la spirale hyperbolique (fig. 25) : en supposant le rayon $CD = r$ & la circonférence du cercle décrit avec ce rayon $= c$, l'équation de cette courbe sera (voyez le n°. 30) $xy = rc$, ou $z = \frac{rc}{y}$, en écrivant z au lieu de x. Si on faisoit un arc constant $AD = c$, l'équation $z = \frac{rc}{y}$ représenteroit encore une spirirale hyperbolique, dans laquelle AF étant z, CG seroit $= y$. Diffé-

ciant l'équation, & faisant attention que lorsque AF décroît, y croît & réciproquement, l'on aura $dz = \frac{rcdy}{yy}$; mais en supposant $Gm = dx$, à cause des arcs semblables, (c'est-à-dire, qui mesurent un même angle) Ff, Gm, l'on a $dz : dx :: r : GC = y$, ou $dz = \frac{rdx}{y}$, ou $dx = \frac{ydz}{r} = \frac{cdy}{y}$, en substituant la valeur de dz; donc $dx : dy :: \frac{cdy}{y} : dy :: c : y$. En supposant $y = \infty$, la raison $\frac{dx}{dy} = \frac{c}{y}$, est plus petite qu'aucune quantité donnée; & alors mG disparoissant devant $dy = mg$, l'angle mgG est censé $= 0$, & les lignes GC & mC sont censées parallèles, c'est-à-dire, qu'alors mC devient MC. L'ordonnée y devient infinie, lorsque l'arc AF devient $= 0$, c'est-à-dire, lorsque l'ordonnée se confond avec CM. Cependant CM n'est point tangente de la courbe à l'infini, ni asymptote; car si on tire CE perpendiculaire à CM & égale à l'arc c = AD (*), & qu'on mene EN parallèle à CM, la droite EN sera asymptote.

Voici la méthode qu'on peut suivre pour déterminer si une ordonnée infinie est asymptote, ou si c'est une autre ligne parallèle à cette ordonnée. On cherchera la soustangente de la spirale, dont on déterminera la valeur dans la supposition de y infini. Si la sous-tangente $= 0$, il est visible que l'ordonnée infinie est elle-même asymptote; si la sous-tangente est égale à une constante c, par exemple, alors l'asymptote sera parallèle à l'ordonnée, & en sera éloignée de la quantité c. Ainsi dans la spirale hyperbolique, la sous-tangente étant $= c$ (30); si l'on mene CT $= c$, & perpendiculaire à CG, la droite TG touchera la spirale au point G. Si y devient infini, & se confond avec CM, la sous-tangente reste $= c$ & CE $= c$, & perpendiculaire sur CM devient sous-tangente; donc EN devient tangente & asymptote.

(*) Si c représentoit la circonférence, il faudroit prendre CE égale à cette circonférence.

43. Les triangles $g\,m\,G$, $G\,C\,T$ rectangles en m & C, & dont les angles $m\,g\,G$ & $C\,G\,T$ sont censés égaux à cause des lignes infiniment proches $C\,g$ & $C\,G$, sont semblables & donnent $m\,g : m\,G :: C\,G : C\,T$, ou $dy : dx ::$ $y : C\,T = \frac{y\,dx}{dy}$, qui est la sous-tangente de toutes les courbes qui partent d'un point; mais il faut substituer la valeur de dx, ou de $m\,G$ tirée de l'équation de la courbe, afin de faire disparoître les différentielles (voyez le n°. 30). Ici, par exemple, on substitueroit $\frac{y\,dz}{r}$, ou plutôt $\frac{c\,dy}{y}$ à la place de dx, & l'on auroit $C\,T$, comme on l'a trouvé (30), où l'on a désigné par dx ce que nous venons de désigner par dz. Les triangles $n\,N\,m$, $C\,L\,N$ (fig. 18), ayant leurs côtés perpendiculaires, sont semblables, & donnent $n\,m = dx : N\,m = dy \,.\, C\,N = y : C\,L = \frac{y\,dy}{dx}$, expression de la valeur de la sous-normale $C\,L$ d'une courbe dont les ordonnées partent d'un point.

De la fraction $\frac{0}{0}$ & des tangentes qui en dépendent.

44. o n'étant pas une quantité, on ne peut diviser o par o qu'en considérant o comme une quantité infiniment petite du premier, ou du second, ou du troisiéme ordre, &c. Or la fraction $\frac{0}{0}$ peut avoir une valeur finie, parce que les infinis du même ordre peuvent être entr'eux dans le même rapport que les quantités finies. D'ailleurs lorsqu'un ou plusieurs facteurs égaux à o affectent le numérateur & le dénominateur d'une fraction, cette fraction devient $= \frac{0}{0}$. Pour déterminer la valeur d'une telle fraction, soit la fraction $\frac{b\,x\,x - 2\,a\,b\,x + a\,a\,b}{c.\,(x - a)^2} = \frac{0}{0}$, dans le cas

de $x = a$; car alors ſon numérateur devient $= 0$; auſſi bien que ſon dénominateur. Si l'on diviſe le numérateur & le dénominateur par $x - a$, l'on a $\frac{b.(x-a)}{c.(x-a)} = \frac{0}{0}$, à cauſe de $x - a = 0$. Mais en diviſant encore par $x - a$, l'on trouve $\frac{b}{c}$; qui eſt la véritable valeur de la fraction propoſée. De-là on peut conclure *que lorſqu'une fraction devient $= \frac{0}{0}$, dans la ſuppoſition de $x = a$, on trouvera la valeur de cette fraction, en diviſant le numérateur & le dénominateur par $x - a$; ſi alors ni le numérateur ni le dénominateur ne devenoit pas $= 0$, la valeur de la fraction ſeroit finie, s'ils deviennent tous les deux $= 0$, on diviſera encore par $x - a$; ſi dans le ſecond cas aucun des termes de la fraction ne s'évanouit, l'on aura une valeur finie de la fraction; & ainſi de ſuite. Mais ſi l'un des termes s'évanouit & non l'autre, la valeur de la fraction ſera infiniment grande, ſi le dénominateur s'évanouit, ou infiniment petite, ſi c'eſt le numérateur.* Par exemple, la fraction $\frac{(x-a).(x-a)}{b.(x-a)} = \frac{0}{0}$, dans la ſuppoſition de $x = a$, devient (en diviſant tout par $x - a$) $= \frac{x-a}{b} = \frac{0}{b} = 0$. Mais la fraction $\frac{b.(x-a)^2}{c.(x-a)^3} = \frac{0}{0}$, dans la ſuppoſition de $x = a$, devient (en diviſant tout par $x - a$) d'abord $\frac{b.(x-a)}{c.(x-a)^2}$; & en continuant la diviſion, l'on a $\frac{b}{c.(x-a)} = \frac{b}{0} = \infty$,

en considérant $x - a$ comme une quantité infiniment petite, ou regardant x comme $= a + \frac{1}{\infty}$, & $x - a$ comme $a + \frac{1}{\infty} - a = \frac{1}{\infty}$ (*).

Mais cette méthode est ou inutile ou très-compliquée, lorsque la fraction est affectée de plusieurs radicaux; venons donc à un autre méthode, c'est celle de Jean Bernoully. *Selon cette méthode, il faut differencier le numérateur & le dénominateur; si les différentielles ne s'évanouissent pas toutes deux, dans la supposition de $x = a$, on divisera l'une par l'autre, & l'on aura la valeur de la fraction; si elles s'évanouissent ensemble, on differenciera de nouveau, en regardant dx comme constant, & ainsi de suite jusqu'à ce que les différentielles ne s'évanouissent pas toutes les deux.*

Soit la fraction $\frac{b.(a-x)}{c.(a-x)} = \frac{p}{q}$, en faisant le numérateur $= p$, & le dénominateur $= q$. La valeur de la fraction, dans la supposition de $x = a$, sera $= \frac{dp}{dq} = \frac{-bdx}{-cdx} = \frac{-b}{-c} = \frac{b}{c}$.

Soit la fraction $\frac{b.(a-x)^2}{(a-x)^2} = \frac{p}{q}$; en différenciant l'on a $\frac{dp}{dq} = \frac{-2b.(a-x).dx}{-2.(a-x).dx} = \frac{0}{0}$ (**), dans la supposition de $x = a$.

(*) Selon ce qu'on a dit dans la premiere partie, une quantité infiniment petite peut être regardée comme n'augmentant ni ne diminuant une quantité finie.

(**) La différentielle de $a - x$ est $= -dx$.

c'eſt pourquoi je différencie de nouveau, en regardant dx comme conſtant, & j'ai $\frac{ddp}{ddq}$ $= \frac{+2b.dx^2}{+2dx^2} = \frac{+2b}{+2} = b.$

Soit la fraction $\frac{p}{q} = \frac{b.(a-x)}{c(aa-2ax+xx)}$ $= \frac{0}{0}$, dans la ſuppoſition de $x = a$. L'on a $\frac{dp}{dq}$ $\frac{-bdx}{-2c.(a-x)dx} = \frac{bdx}{2c.(a-x).dx} = \frac{b}{2c.(a-x)}$ $= \frac{b}{0}$ (à cauſe de $a-x=0$) $= \infty$. Ainſi la valeur de cette fraction eſt infinie. Soit la fraction $\frac{b.(a-x)^2}{c.(a-x)} = \frac{p}{q} = \frac{0}{0}$, dans la ſuppoſition de $x = a$; donc $\frac{dp}{dq} = \frac{-2b.dx.(a-x)}{-c.dx}$ $= \frac{b.(a-x)}{c} = \frac{0}{c}$ (à cauſe de $x = a$); donc $\frac{p}{q} = 0$, ou, ſi l'on veut $= \frac{1}{\infty}$.

On ſe tromperoit cependant, ſi l'on penſoit que cette méthode peut toujours donner la véritable valeur de la fraction $\frac{p}{q}$. En effet, ſoit $\frac{p}{q}$ $= \frac{\sqrt{(2aa-3ax+xx)}}{\sqrt{(a-x)}}$ qui, par la premiere méthode, en diviſant le numérateur & le dénominateur par $\sqrt{(a-x)}$, devient $= \sqrt{(2a-x)} = \sqrt{a}$, dans la ſuppoſition de $x = a$. En employant la méthode de Jean Bernoully, l'on aura $\frac{dp}{dq}$

$$= \frac{(-3\,adx + 2\,xdx) \times 2\sqrt{(a-x)}}{-2\,dx\sqrt{(2aa - 3ax + xx)}}$$

$$= \frac{(3a - 2x)\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{(2aa - 3ax + xx)}} = \frac{0}{0},$$ dans la ſuppoſition de $x = a$. Prenant de nouveau les différences, on aura $\frac{ddp}{ddq} = \frac{0}{0}$; prenant encore les différences, l'on trouvera $\frac{dddp}{dddq} = \frac{0}{0}$; & ainſi à l'infini; car les deux radicaux ne diſparoîtront jamais. Cela arrivera ainſi, parce que la valeur du numérateur (l'on doit dire la même choſe du dénominateur), n'appartient à aucun ordre des quantités dx^0, dx, dx^2, dx^3, &c. mais eſt moyen entre ces ordres, ainſi qu'il ſera aiſé de le voir par la méthode que nous allons expoſer. Mais par la premiere différenciation, on trouve dx; dx^2 par la ſeconde; dx^3 par la troiſiéme; &c. donc on ne peut par cette méthode obtenir la valeur de la fraction propoſée.

La méthode que l'on peut ſuivre pour avoir la valeur de la fraction $\frac{p}{q} = \frac{0}{0}$, dans la ſuppoſition de $x = a$, conſiſte à mettre dans le numérateur auſſi bien que dans le dénominateur, $a \pm dx$ à la place de x; on met $a - dx$, dans le cas que la ſubſtitution de $a + dx$ introduiroit des quantités imaginaires; ce qui arriveroit dans la fraction dont nous venons de parler; & la nouvelle fraction qu'on trouvera en s'arrêtant aux différentielles qui ne s'évanouiſſent pas dans la ſuppoſition de $x = a$, ſera de cette forme $\frac{R\,dx^m}{u\,dx^n}$. Si $m = n$, la valeur de la fraction ſera

finie & $= \frac{R}{u}$. Si $m > n$, elle sera infiniment petite; mais elle sera infinie, si $m < n$. Si donc on a la fraction $\frac{b.(a-x)^2}{D.(a-x)^2}$, en substituant $a + dx$ au lieu de x, il vient $\frac{b.(a-a-dx)^2}{D.(a-a-dx)^2}$ $= \frac{b.dx^2}{D.dx^2} = \frac{b}{D}$, comme on le trouveroit par la premiere & la seconde méthode. Mais la fraction, $\frac{b.(a-x)^3}{A.(a-x)^4}$ devient $= \frac{b.(a-a-dx)^3}{A.(a-a-dx)^4}$ $= -\frac{bdx^3}{Adx^4} = -\frac{b.}{A.dx} = -\infty$.

Soit la fraction $\frac{+p}{q} = \frac{\sqrt{(2aa-3ax+xx)}}{\sqrt{(a-x)}}$; en substituant $a + dx$ au lieu de x, le numérateur deviendroit imaginaire, ainsi que le dénominateur; c'est pourquoi mettant $a - dx$ au lieu de x & réduisant, j'ai $\frac{dp}{dq} = \frac{\sqrt{(adx+dx^2)}}{\sqrt{dx}}$ $= \frac{\sqrt{dx}.\sqrt{(a+dx)}}{\sqrt{dx}}$; or $(a+dx)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ $+ \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}dx - \frac{1}{8} \times a^{-\frac{3}{2}}.dx^2$ &c. $= a^{\frac{1}{2}}$, parce que les termes suivans disparoissent devant le premier; donc la fraction proposée est $= \frac{(dx)^{\frac{1}{2}}\sqrt{a}}{(dx)^{\frac{1}{2}}}$ $= \sqrt{a}$, comme on l'a trouvé par la premiere méthode.

REMARQUE. En prenant les racines, on doit avoir attention de choisir pour premier terme

une quantité qui ne contienne pas dx, pour second terme celui qui contient la premiere puissance de dx, pour troisiéme terme les quantités affectées de dx^2, & ainsi de suite; & l'on doit pousser l'aproximation jusqu'à ce que les quantités hors du signe ne détruisent plus les termes que l'on trouve par cette approximation. Cependant il peut arriver que le second terme contienne dx^2, le troisiéme dx^4, comme cela arriveroit, si l'on avoit $\sqrt{(a+dx^2)}$.

¶ L'on peut abréger le calcul, en supposant $a-x=t$, ce qui donne $x=a+t$, & substituant dans l'équation, $a+t$ au lieu de x & dt à la place de dx. Soit, par exemple, la fraction $\frac{2a^3+2a^2t-att+t^3-2aa\sqrt{(aa+2at)}}{-2aa+tt+2a\sqrt{(aa-tt)}}$, qui résulte d'une autre fraction par la substitution de t à la place de $x-a$. Comme $t=x-a$ est $=0$, dans la supposition de $x=a$, pour trouver la valeur de la fraction proposée, qui devient $=\frac{0}{0}$, dans la supposition de $t=0$, je substitue dt à la place de t & je trouve

$$\frac{2a^3+2aadt-adt^2+dt^3-2aa\sqrt{(aa+2adt)}}{-2aa+dt^2+2a\sqrt{(aa-dt^2)}};$$

convertissant les radicaux en series, & les continuant jusqu'au premier terme, qui n'est pas détruit, par les quantités rationnelles, l'on a $\sqrt{(aa+2adt)}=a+dt-\frac{dt^2}{2}$ $+\frac{dt^3}{2a}-\frac{5dt^4}{8a^3}$. L'on a aussi $\sqrt{(aa-dt^2)}$

$= a - \frac{dt^2}{2a} - \frac{dt^4}{8a^3}$ (*). Substituant ces valeurs & réduisant, l'on a la fraction $\frac{5.4.aadt^4}{-4adt^4} = -5a$.

Soit la fraction $\frac{b.(a-x)^2}{(a-x)^2}$, que nous avons trouvée ci-dessus $= b$, dans le cas de $a = x$. Si on met t à la place de $a - x$, l'on a $\frac{bt^2}{t^2}$. Substituant dt à la place de t, l'on a $\frac{bdt^2}{dt^2} = b$, comme ci-dessus.

Soit la fraction $\frac{caa - 2acx + cx^2}{baa - 2abx + bxx} = \frac{0}{0}$, dans la supposition de $x = a$. Substituant $a + dx$ à la place de x, l'on a, toute réduction faite, $\frac{cdx^2}{bdx^2} = \frac{c}{b}$. Telle est la valeur de la fraction proposée.

REMARQUE I. Lorsqu'on est parvenu à un ordre de différentielles (soit dans le numérateur, soit dans le dénominateur), qui ne s'évanouissent pas par la contrariété des signes, il n'est pas nécessaire d'aller plus loin; parce qu'en opérant, comme dans les exemples précédens, on trouveroit

(*) Le terme $-\frac{dt^2}{2a}$ étant multiplié par $2a$ multiplicateur du radical, est $= -dt^2$, qui est détruit par dt^2.

des quantités infiniment plus petites que celles que l'on a déja trouvées.

REMARQUE II. La méthode de Bernoully étant fort aisée, on pourra l'employer dans le cas où elle peut réussir.

Soit la fraction $\frac{p}{q} = \frac{L. x}{\sqrt{(1-x)}}$ (*), (L désigne le logarithme hyperbolique), dont on demande la valeur, dans la supposition de $x = 1$. La différence du numérateur est $= \frac{dx}{x}$, celle du dénominateur étant $\frac{1}{2} dx (1-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{dx}{2.\sqrt{(1-x)}}$; donc $\frac{dp}{dq} = \frac{2.\sqrt{(1-x)}}{x} = 0$, dans la supposition de $x = 1$; ainsi la valeur de la fraction proposée est $= 0$.

Soit la fraction $\frac{x - x^{n+1}}{1-x} = \frac{0}{0}$ dans la supposition de $x = 1$. Différenciant à l'ordinaire, il vient $\frac{dx - (n+1)x^n dx}{-dx} = \frac{1-(n+1)x^n}{-1}$ $= n$, en supposant $x = 1$; donc la valeur de cette fraction est $= n$. Si $n = 10$, la valeur de cette fraction sera 10.

Soit la fraction $\frac{1 - \sin. x + \cos. x}{-1 + \sin. x + \cos. x} = \frac{0}{0}$,

(*) Cette fraction devient $= \frac{0}{0}$, lorsque $x = 1$; car $L. 1 = 0$.

en ſuppoſant que x eſt un arc de 90°, & que le rayon $= 1$. Prenant les différences & diviſant par dx, l'on a $\frac{-cof.\ x - ſin.\ x}{cof.\ x - ſin.\ x} = \frac{-ſin.\ x}{-ſin.\ x} = \frac{-1}{-1} = 1$, à cauſe de $cof.\ x = 0$, & de $ſin.\ x = 1$.

Parlons maintenant des tangentes qui dépendent de la fraction $\frac{0}{0}$. Soit (fig. 26) la courbe mLn, dont l'équation eſt $y = b \pm (x - a). \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}$, en faiſant A P $= x$, P $m = y$; il eſt viſible qu'à chaque abſciſſe il répondra deux ordonnées, mais au point i, d'interſection de deux branches ms, ng, il ne répond qu'une ſeule ordonnée pi, qui cependant eſt cenſée double, & le point i eſt un point double auquel répond une double tangente it, iT, dont l'une appartient à une des branches de la courbe, & l'autre à l'autre branche; de plus la valeur de l'ordonnée correſpondante au point i ſera $= b$; puiſqu'à ce point A$p = x$ eſt $= a =$ Li.

En différenciant l'équation de la courbe, l'on a $dy = \pm dx \sqrt{\frac{x}{a}} \pm dx (x - a) \frac{1}{2}. \left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $= \pm dx \sqrt{\frac{x}{a}}$, dans la ſuppoſition de $x = a$; donc $dy^2 = dx^2. \frac{x}{a} = dx^2$ (à cauſe de $x = a$), $\frac{dy^2}{dx^2} = 1$, $\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{1} = \pm 1$; donc au point i, il répond deux tangentes qui ſe croiſent, & font un angle de 45° avec la ligne Li parallèle

à AP, l'une dans un ſens, l'autre dans l'autre ſens. Pour trouver ces ſortes de tangentes, il faut différencier l'équation, & ſuppoſant que l'abſciſſe correſpondante au point d'interſection eſt $=A$, & que l'ordonnée eſt $=B$, on ſubſtituera $A+dx$ à la place de x, $B+dy$ à la place de y; tranſpoſant tous les termes d'un côté, & prenant pour premier terme toutes les quantités finies, on prendra pour ſecond terme toutes les quantités affectées de dx, ou de dy linéaires; pour troiſiéme terme toutes les quantités qui renferment dx^2, $dx\,dy$, dy^2 dont la ſomme des expoſans eſt $=2$; pour quatriéme terme toutes les quantités dans leſquelles la ſomme des expoſans de ces différentielles eſt $=3$; &c. Le premier terme ſera toujours $=0$; on s'arrêtera au ſecond, s'il n'eſt pas $=0$, & alors il n'y a point d'interſection; s'il eſt $=0$, on ira au troiſiéme, & il y aura un point d'interſection. Si le troiſiéme s'évanouit par la contrariété des ſignes, le quatriéme indiquera la poſition des tangentes, & ainſi de ſuite. Au lieu d'écrire $A+dx$ à la place de x, & $B+dy$ à la place de y, on peut, ſi l'on veut, écrire $x+dx$ & $y+dy$, cela revient au même; on peut auſſi, ſi l'on veut ſe diſpenſer d'extraire des racines, faire diſparoître les radicaux de l'équation avant de différencier.

Soit la ligne du quatriéme ordre dont l'équation eſt $y^4-8ay^3-12axy^2+16a^2y^2+48aaxy+4a^2x^2-64a^3x=0$. Si dans cette équation on ſuppoſe $x=2a$, on trouvera $y=2a$, & l'on a une interſection de deux branches correſpondantes à ces co-ordonnées égales. Écrivant donc $2a+dx$ à la place de x, $2a+dy$ à la place de y, ou ſi l'on veut, écrivant $x+dx$ au lieu de x, & $y+dy$ au lieu de y, diſpoſant les

quantités de la même dimenſion, les unes ſous les autres, l'on aura

$$\left.\begin{array}{llll}
y^4 & +4y^3dy & +6y^2dy^2 & +4ydy^3+dy^4 \\
-8ay^3 & -24ay^2dy & -24aydy^2 & -8ady^3 \\
-12axy^2 & -24axydy & -12axdy^2 & -12adxdy^2 \\
+16a^2y^2 & -12ayydx & -24aydydx & \\
+48a^2xy & +32a^2ydy & +16a^2dy^2 & \\
+4a^2x^2 & +48a^2xdy & +48aadxdy & \\
-64a^3x & +48a^2ydx & +4aadx^2 & \\
 & +8a^2xdx & & \\
 & -64a^3dx & &
\end{array}\right\} = 0$$

Pour trouver le rapport entre dx & dy d'où dépend la tangente, je remarque que la premiere colonne, que je regarde comme un ſeul terme, s'évanouit, en ſuppoſant $x = 2a$ & $y = 2a$; ſi la ſeconde colonne ne s'évanouiſſoit pas, elle ſuffiroit pour faire trouver la tangente. Mais en ſuppoſant $x = 2a$ & $y = 2a$, dx & dy ſont multipliés, chacun par o. C'eſt pourquoi je paſſe à la troiſième colonne, qui ne s'évanouit pas comme la premiere, & négligeant les autres colonnes comme s'évanouiſſant devant la troiſiéme, je trouve en ſubſtituant $2a$ à la place de x & de y, & faiſant le calcul, je trouve, dis-je, $dx^2 = 8dy^2$, ou $\frac{dx^2}{dy^2} = 8 = \frac{8}{1}$, & $\frac{dx}{dy} = \pm \frac{\sqrt{8}}{1}$ $= \pm \frac{2\sqrt{2}}{1}$. Donc au point de la courbe correſpondant à l'abſciſſe $x = 2a$, il y a deux tangentes qui font avec l'ordonnée l'une l'angle dont la tangente eſt exprimée par $\frac{2\sqrt{2}}{1}$, l'autre faiſant l'angle dont la tangente eſt $= -\frac{2\sqrt{2}}{1}$;

REMARQUE I. Cette méthode peut réussir, lors même qu'il y a des radicaux, pourvu qu'en extrayant les racines avec la précaution que les quantités finies constituent, le premier terme, les infiniment petites, selon leur rang, constituant le second, troisiéme, &c. ainsi qu'on l'a dit ci-dessus.

REMARQUE II. Si on différencie à l'ordinaire la premiere colonne du dernier exemple, on aura la seconde ; & en différenciant la seconde, en regardant dx & dy comme constans, & divisant par 2, on a la troisiéme colonne ; différenciant de même la troisiéme, & divisant par 3, on a la quatriéme.

C'est pourquoi le rapport cherché de $dx : dy$ peut se trouver, en différenciant selon la méthode ordinaire. Pour cela on différenciera l'équation de la courbe par la méthode vulgaire. Cette premiere différenciation donnera le rapport de $dx : dy$; mais si tous les termes disparoissent par une certaine supposition de $x = a$ & de $y = b$, on différenciera de nouveau, en regardant dx & dy comme constans : l'équation qui en résultera fera connoître le rapport cherché. Cette équation différera de celle qu'on trouveroit par la méthode ci-dessus, en ce qu'elle aura tous les termes multipliés par 2. Mais un multiplicateur qui affecte tous les termes d'une équation, ne trouble pas l'égalité. Si la seconde équation s'évanouit, on continuera de même jusqu'à ce qu'on parvienne à une équation dont les termes ne se détruisent pas par la contrariété des signes. Si l'équation est compliquée de radicaux, on pourra les faire disparoître avant de différencier.

Soit supposée l'équation de la courbe $a(y-b)^2$

$-x(x-a)^2=0$, cette courbe (fig. 26) est la même que celle dont on a parlé ci-dessus. En différenciant à l'ordinaire, je trouve $2ady(y-b)-dx.(x-a)^2-2x.dx.(x-a)=0$. Si on suppose $y=b$ & $x=a$, le multiplicateur de dx & celui de dy deviennent chacun $=0$. C'est pourquoi l'on a dans ce cas $\frac{dx}{dy}=\frac{0}{0}$. Je différencie donc de nouveau, en traitant dx & dy comme constans, ce qui me donne $2a\,dy^2-2dx^2(x-a)-2dx^2(x-a)-2x\,dx^2=0$, équation qui, en supposant $x=a$, devient $2a\,dy^2-2a\,dx^2=0$; donc $\frac{dx^2}{dy^2}=1$, & $\frac{dx}{dy}=\pm 1$, comme on l'a trouvé ci-dessus.

Pour avoir la position de la tangente de la courbe B M C mbn C D (dont l'origine des abscisses est au centre C d'un cercle dont le rayon CB $=a$) (fig. 27) désignée par l'équation $(y^2+x^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ & qu'on appelle *lemniscate*, au point auquel $x=0$ & $y=0$; en substituant $x+dx$ au lieu de x, & $y+dy$ au lieu de y, ou, si l'on veut, en substituant $0+dx=dx$ & $0+dy=dy$, au lieu de x & de y, on trouvera, dis-je, $(dy^2+dx^2)^2=a^2dx^2-a^2dy^2$, ou en ôtant l'exposant 2 & transposant, $dy^4+2dy^2\times dx^2+dx^4+a^2dy^2-a^2dx^2=0$; ainsi $a^2dy^2-a^2dx^2=0$ (parce que les autres termes disparoissent devant ces deux-là), ou $a^2dy^2=a^2dx^2$, $\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{aa}{aa}=1$, $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{1}=\pm 1$. Donc au point C répondent deux tangentes qui font un angle de 45° avec la ligne des abscisses.

REMARQUE I. On peut employer différentes méthodes, ainsi qu'on vient de le voir, pour trouver les tangentes. Dans chaque cas il est bon d'employer celle qui est moins embarrassante; & si l'on trouve quelque difficulté en employant l'une, on fera usage de l'autre.

Si l'on arrivoit à une équation de cette forme, $\frac{dx^3}{dy^3} - \frac{a^2 dx}{b^2 dy} = 0$, l'on auroit $\frac{dx}{dy} = 0$, $\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{a^2}{b^2}$, & $\frac{dx}{dy} = \pm \frac{a}{b}$; de sorte qu'il y auroit trois tangentes au point correspondant de la courbe; l'une seroit parallèle aux ordonnées, & les deux autres feroient avec l'ordonnée un angle dont la tangente est $= \frac{a}{b}$, l'une d'un côté, l'autre de l'autre.

45. REMARQUE II. On peut quelquefois avoir la tangente d'une courbe d'une maniere fort élégante par quelque propriété donnée de cette courbe. Pour en donner un exemple, soit la courbe LM (fig. 28) qu'on appelle *épicicloïde* (& dont nous avons donné l'équation dans les courb. alg. 70, en supposant que le cercle mobile est égal à l'immobile), cette courbe est décrite par le mouvement d'un point M, situé sur la circonférence du cercle mobile RMP, qui circule sur la circonférence du cercle LRB; de maniere que l'arc LR est égal à l'arc MR, soit que le diamètre du cercle mobile ait avec le diamètre de l'immobile une raison d'égalité ou d'inégalité. Pour mener la tangente au point M de la courbe, je remarque que le point décrivant M est l'extrémité de la corde MR qui fait un angle droit avec la corde MP, parce que

l'angle PMR est appuyé sur le diamètre RP ; de plus le point décrivant M peut être regardé comme l'extrémité d'un compas qui décrit un arc circulaire infiniment petit Mi, auquel la ligne MR est toujours perpendiculaire. Donc la corde MR est perpendiculaire à l'arc Mi, qui est un petit arc de l'épicicloïde ; & partant MR est normale de l'épicicloïde ; or la normale est perpendiculaire à la tangente de la courbe ; ainsi PM est tangente de la courbe. Donc pour mener une tangente au point M de l'épicicloïde, par le point M on décrira le cercle générateur, par le centre C du cercle immobile, & le point R où le cercle générateur touche le cercle LRB, on tirera la ligne CRP ; & joignant les points M & R, M & P par les lignes MR, PM, la premiere sera normale, & la seconde tangente de l'épicicloïde. Il est donc facile d'avoir la tangente PMT d'une telle courbe ; ce qui seroit bien difficile dans tous les cas par une autre méthode. Pour décrire par le point M le cercle générateur PDM, je remarque que si du point C comme centre avec le rayon Cb = CR + Rb somme des rayons du cercle mobile & du cercle immobile, on décrit la circonférence baf, le centre b du cercle mobile sera toujours dans la circonférence de ce cercle ; donc si du point M avec le rayon bR on décrit un arc bt du côté opposé au point L, cet arc rencontrera la circonférence baf en un point b, par lequel avec le rayon Rb, on décrira le cercle générateur qui touchera le cercle immobile en R, & rencontrera l'épicicloïde en M.

De la méthode des maximis & minimis.

46. Selon ce que nous avons dit ci-dessus (36), lorsque dy est supposé $=0$, la tangente désignée par $\frac{dy}{dx}$ est parallèle aux abscisses. Si dans une courbe ANa (fig. 29) les ordonnées vont en croissant jusqu'à un certain point, puis en décroissant, la tangente au point M situé entre A & N rencontrera l'axe du côté de A.

Mais la tangente mt au point m situé entre N & a, rencontrera l'axe du côté opposé ; donc la tangente au point N ne rencontrera l'axe d'aucun côté, & sera parallèle aux abscisses. Or il est visible que cela arrivera au point N, point auquel les ordonnées PM cessent de croître pour décroître aussi-tôt ; c'est-à-dire au point où l'ordonnée CN est plus grande que les ordonnées voisines PM, pm prises l'une à droite & l'autre à gauche : l'ordonnée CN s'appelle alors un *maximum*. Si la courbe MNm (fig. 30) est convexe du côté de l'axe PC, il peut arriver que les ordonnées allant d'abord en décroissant jusqu'en N, croissent ensuite de maniere que CN soit plus petite que les ordonnées voisines : dans ce cas on l'appelle un *minimum* ; & alors la tangente Nn est évidemment parallèle aux abscisses. Ainsi lorsque la tangente est parallèle aux abscisses, on peut avoir un *maximum*, ou un *minimum*. Cela peut arriver aussi lorsque la tangente est parallèle aux ordonnées (fig. 31) ; car la ligne CN se confond avec la tangente au point N, ou pour mieux dire, cette ligne est tangente des deux branches MN, mN, & l'arc infiniment petit Ni est censé être une ligne droite qu'on peut regarder comme faisant un angle infiniment petit avec l'ordonnée Li. Dans le triangle rectangle iNs, en faisant le rayon $=1$,

l'on a $si = dy : sN = LC = dx :: 1 : tang.\ siN = \frac{dx}{dy}$. Or cet angle étant infiniment petit, la raiſon de $dx : dy$ doit être infiniment petite, c'eſt-à-dire, que dy eſt alors infiniment plus grand que dx. Cela a également lieu dans la figure 32, mais avec cette différence que CN eſt un *minimum* dans la fig. 31, & un *maximum* dans la fig. 32. Donc on peut avoir un *maximum* ou un *minimum*, lorſque le rapport de $dy : dx$ eſt tel que dy peut être regardé, reſpectivement à dx comme une quantité infiniment grande.

Cependant toutes les fois que dy eſt $=0$, on ne doit pas conclure qu'on a un *maximum* ou un *minimum*; car cela indique ſeulement que la tangente eſt parallèle à la ligne des x; mais la tangente Nn (fig. 33) peut être parallèle à la ligne des x, ſans que les ordonnées voiſines du point N ſoient à la fois plus grandes ou plus petites que l'ordonnée CN. Cela peut arriver lorſque la courbe AN de concave devient convexe ou réciproquement; mais alors la ligne Nn peut être parallèle à AP, & de plus être tangente de la partie concave AN, & de la partie convexe Nm. Dans la fig. 34, la ligne Nn eſt tangente des deux branches mN, MN & CN n'a aucune ordonnée voiſine du côté de la droite; ainſi cette ordonnée ne peut être ni un *maximum*, ni un *minimum*, dans le ſens que nous l'entendons ici. De même l'ordonnée Nc (fig. 33) $= y$ (en faiſant A$c = x$ & cN $= y$) peut être parallèle aux ordonnées, ſans cependant être un *maximum*, ou un *minimum*. Cela peut arriver au *point d'inflexion* (*).

(*) Un point d'inflexion N (fig. 33 & 35) eſt celui auquel une courbe de concave vers ſon axe devient convexe ou réciproquement.

Pour connoître le *maximum* ou le *minimum*, on ſuppoſera d'abord $dy = 0$, & de-là on tirera la valeur de l'abſciſſe correſpondante au *maximum* ou au *minimum*. Si la ſuppoſition de $dy = 0$ ne fait rien connoître, on fera $dx = 0$ ou $\frac{dy}{dx} = \infty$, ou ce qui revient au même, on ſuppoſera $dy = \infty$; parce qu'en ſuppoſant $\frac{dy}{dx} = \frac{A}{B} = \infty$, le réſultat ſera le même que ſi on ſuppoſoit $B = 0$. Pour ſavoir enſuite ſi l'on a un *maximum*, ou un *minimum*, on augmentera d'abord, & enſuite on diminuera x d'une quantité infiniment petite dx. Si dans ces deux cas la valeur de y eſt plus petite que celle qu'on a trouvée, l'on a un *maximum*, ſi elle eſt plus grande, on a un *minimum*. Mais on n'aura ni un *maximum* ni un *minimum*, ſi dans un cas elle eſt plus grande, & dans l'autre plus petite que la valeur de y qu'on a d'abord trouvée. Avant de faire l'application de ce que nous venons de dire, nous ferons remarquer qu'une courbe (fig. 36) peut avoir pluſieurs *maxima* & pluſieurs *minima* CN; cela eſt évident par l'inſpection de la figure.

47. PROBLÊME. *On demande la plus grande ordonnée d'une demi-ellipſe A Na (fig. 29).* L'équation de l'ellipſe en ſuppoſant le grand axe $= 2a$ & le petit axe $= 2b$, eſt $y^2 = \frac{bb}{aa} (2ax - xx)$ donc $2y\,dy = \frac{bb}{aa} (2a\,dx - 2x\,dx)$. Suppoſant $dy = 0$, l'on a $2y\,dy = 2y \times 0 = 0 = \frac{bb}{a} \times (2a\,dx - 2x\,dx)$, ou $2a\,dx = 2x\,dx$, $2a = 2x$,

& $a = x$; c'est-à-dire, que la plus grande ordonnée répond à l'abscisse AC égale au demi-grand axe, ou, ce qui revient au même, la plus grande ordonnée de l'ellipse répond au centre.

Si dans l'équation $y^2 = \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$ on suppose $b = a$, l'on aura $yy = 2ax - xx$: cette équation appartient au cercle, qui est une ellipse dont les axes sont égaux; donc dans le cercle la plus grande ordonnée passe par le centre.

48. PROBLÊME. *Trouver la plus grande ordonnée de la courbe ANa (fig. 37), dont les ordonnées* $CN = z$ *sont moyennes proportionnelles entre les ordonnées* $Cm = y$, *& les abscisses* $AC = x$ *du demi-cercle Ama.* Soit le diamètre du cercle $= 2a$, l'équation du cercle sera $yy = 2ax - xx$; mais l'équation de la courbe sera $zz = yx$. En différenciant l'équation du cercle, l'on a $2y\,dy = 2a\,dx - 2x\,dx$, $dy = \frac{a\,dx - x\,dx}{y}$. L'équation de la courbe donne $2z\,dz = y\,dx + x\,dy = y\,dx + \frac{ax\,dx - xx\,dx}{y}$ (en substituant la valeur de dy) $= \frac{y^2\,dx + ax\,dx - xx\,dx}{y}$. Mais au point du *maximum*, l'on a $dz = 0$, & $2z\,dz = 0$; donc $\frac{y^2\,dx + ax\,dx - xx\,dx}{y} = 0$, $y^2\,dx + ax\,dx - xx\,dx = 0$, $y^2 + ax - xx = 0$. Et en substituant la valeur de y^2 prise de l'équation du cercle, il vient $2ax - x^2 + ax - x^2 = 0$, $3ax - 2xx = 0$, $3a - 2x = 0$, $3a = 2x$, & $x = \frac{3a}{2}$. Prenant donc $AC = \frac{3a}{2}$, le

point C ſera celui auquel répond la plus grande ordonnée.

49. PROBLÊME. *Trouver la plus grande ordonnée d'une ellipſe d'un genre ſupérieur.* L'équation des ellipſes des genres ſupérieurs, en ſuppoſant l'axe $= a$, eſt $\frac{a}{p} y^{m+n} = x^m (a - x)^n$. Donc en différenciant, $(m+n) \frac{a}{p} y^{m+n-1} dy = m x^{m-1} (a-x)^n dx - n x^m dx (a-x)^{n-1} = 0$ (en faiſant $dy = 0$, ce qui rend le premier membre de l'équation & par conſéquent auſſi le ſecond $= 0$); donc diviſant par dx & tranſpoſant, $m x^{m-1} \times (a-x)^n = n x^m (a-x)^{n-1}$, diviſant par $x^{m-1} \times (a-x)^{n-1}$, il vient $m(a-x) = nx$, ou $ma - mx = nx$, $ma = mx + nx$, $x = \frac{ma}{m+n}$.

L'équation des cercles des genres ſupérieurs ne différant de l'équation des ellipſes des genres ſupérieurs qu'en ce que dans les cercles a eſt $= p$, ce qui n'arrive pas dans les ellipſes, en ſuivant le même procédé, on trouvera de même que l'ordonnée correſpondant à l'abſciſſe $x = \frac{ma}{m+n}$ eſt un *maximum* dans ces ſortes de courbes.

Si $m = 5$ & $n = 3$, on aura $x = \frac{5a}{8}$. Si $m = 6$ & $n = 1$, l'on aura $x = \frac{6a}{7}$; & ainſi de ſuite, ſoit qu'il s'agiſſe d'une ellipſe ou d'un cercle des genres ſupérieurs.

50. PROBLÊME. *Trouver la plus grande ordonnée de la courbe AMB (fig. 38), dont la nature eſt*

que le diamètre A b soit toujours égal à l'axe A B, aussi bien qu'à la ligne droite m M menée par le point A à chaque point M & m de la courbe & du demi-cercle Am b. Soit AM $= z$, PM $= y$, Ab $= a$; donc mA $= a - z$. Parce que bA est perpendiculaire à AB, & qu'il en est de même de PM, les lignes bA, PM sont parallèles, & les angles AMP, mAC correspondans sont égaux; & parce que de plus les angles P & $b\,m$A (*) sont droits, les triangles $b\,m$A, PMA sont évidemment semblables, & partant PM : AM :: Am : Ab, ou $y : z :: a - z : a$, $ay = az - zz$, $a\,dy = a\,dz - 2z\,dz = 0$, en faisant $dy = 0$; ainsi $a - 2z = 0$, & $z = \frac{a}{2}$. Mais l'équation $ay = az - zz$, donne (en substituant la valeur de z) $ay = \frac{aa}{2} - \frac{aa}{4} = \frac{aa}{4}$, & $y = \frac{a}{4}$; donc dans le cas du *maximum*, l'on a $(AM)^2 = \frac{aa}{4} = (PM)^2 + (PA)^2$, ou $(PA)^2 = \frac{aa}{4} - \frac{aa}{16} = \frac{4aa}{16} - \frac{aa}{16} = \frac{3aa}{16}$, & $PA = \sqrt{\frac{3aa}{16}} = \frac{a}{4}\sqrt{3}$.

51. PROBLÈME. *Trouver la plus petite ordonnée de la courbe M N m (fig. 31), dont l'équation est* $y - a = \sqrt[3]{a}.(a^2 - 2ax + xx)^{\frac{1}{3}}$. Donc $dy = \frac{1}{3}\sqrt[3]{a}.(-2a\,dx + 2x\,dx).(aa - 2ax + xx)^{-\frac{2}{3}}$, ou (A) $dy = \sqrt[3]{a} \times \frac{(-2a\,dx + 2x\,dx)}{3(aa - 2ax + xx)^{\frac{2}{3}}}$. Si on suppose $dy = 0$, le

(*) Ce dernier angle est appuyé sur le diamètre.

numérateur de la fraction devient $\sqrt[3]{a}.(-2\,a\,dx+2\,x\,dx)=0$, d'où l'on tire $-2\,a+2\,x=0$, $2\,x=2\,a$, $x=a=AC$. Si on suppose dy infiniment plus grand que dx, l'on aura $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt[3]{a}.(-2a+2x)}{3(aa-2ax+xx)^{\frac{2}{3}}}$, & supposant le dénominateur de l'une & l'autre fraction $=0$, l'on aura $dx=0$, & $aa-2ax+xx=0$; & en prenant la racine, il vient $a-x=0$, & $x=a$. Lorsque cela arrive ainsi, c'est une marque que le point correspondant N appartient à plusieurs branches de la même courbe; & que le multiplicateur de dy, aussi bien que celui de dx, est $=0$. En effet, si dans ce cas on fait disparoître la fraction de l'équation A ci-dessus, on aura l'équation $dy\times 3(aa-2ax+xx)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a}.(-2a+2x.)\,dx$; qui, dans la supposition de $x=a$, devient $dy\times 0=0\times dx$, ou $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$ & l'ordonnée CN est la tangente des deux branches NM, Nm, ou, si l'on veut, les deux tangentes de ces branches, se confondent au point N, ne formant plus qu'une seule ligne NC.

52. PROBLÈME. *Trouver la plus grande ordonnée d'une demi-cicloïde racourcie AMB (fig. 39).* Supposant la demi-circonférence du cercle générateur $=C$, la base de cette cicloïde $=D$, l'arc de cercle $An=x$, l'équation de la courbe rapportée au diamètre Ag du cercle générateur, sera (selon ce qu'on a dit dans la premiere partie de cet Ouvrage courbes transcendentes n°. 10) $pm=y=\mathit{sin}.\,x+\frac{Dx}{C}$; donc $dy=d.(\mathit{sin}.\,x)+\frac{D\,dx}{C}$. Pour avoir la différentielle de $\mathit{sin}.\,x=pn$, je tire ns perpendiculaire à fi, je fais $Ap=z$, & j'ai $bp=a-z$, & $si=d(pn)$ (en supposant les ordonnées fi, pn infiniment proches); ainsi $ni=dx$. Or les triangles bnp, nis ayant leurs côtés perpendiculaires, sont semblables; donc $bn:bp::ni:si$, ou $a:a-z::dx:si=d.(pn)=\frac{adx-zdx}{a}$. Donc en substituant cette valeur de $d.(\mathit{sin}.\,x)$, $dy=\frac{adx-zdx}{a}+\frac{Ddx}{C}=\frac{aCdx-Czdx+aDx}{aC}=0$ (en supposant $dy=0$);

donc aC—Cz+aD= o, aC+aD=Cz, & $z = \frac{aC+aD}{C}$ $= a + \frac{aD}{C}$. C'eſt pourquoi l'on aura l'abſciſſe A P correſpondante à la plus grande ordonnée P M, en ajoutant, au rayon A b une ligne b P troiſiéme proportionnelle à la demi-circonférence du cercle générateur, au rayon a du même cercle & à la baſe D de la cicloïde racourcie.

53. PROBLÈME. *Trouver la plus petite ordonnée d'une courbe exponentielle dont l'équation eſt $y = x^x$ (fig. 17).*

De l'équation à la courbe, on tire $L.y = x L.x$, $\frac{dy}{y} = dx.\ L.x + x.\ (\frac{dx}{x})$, $dy = y\ (dx\ L.x + dx) = o$, en ſuppoſant $dy = o$; donc $y\ dx = -y.\ dx.\ L.x$, ou $1 = -L.x$. Prenant donc ſur l'axe R A de la logarithmique l'abſciſſe négative A q = A B = 1, il viendra $bq = x$, A $q = 1 = -L.x$. C'eſt pourquoi par le point b, menant $b\ a$, l'ordonnée correſpondante au point a ſera la plus petite ordonnée cherchée. Voyez ce que nous avons dit ci-deſſus (29) ſur la nature de cette courbe.

Si l'on ne connoiſſoit point aſſez la figure de la courbe pour juger ſi l'on a trouvé un *maximum* ou un *minimum*, ou même ſi l'on vouloit ſavoir ſi la courbe a un *maximum* ou un *minimum*, on s'y prendroit comme dans les problêmes ſuivans.

54. PROBLÊME. *Chercher les* maxima *& les* minima *de la courbe dont l'équation eſt* $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{y}{a}$.

Donc $\frac{dx}{a} - \frac{a\,dx}{x^2} = \frac{dy}{a} = o$, en ſuppoſant $dy = o$; & par conſéquent $\frac{dx}{a} = \frac{a\,dx}{x^2}$, $\frac{1}{a} = \frac{a}{x^2}$, $\frac{x^2}{a} = a$, $x^2 = a^2$ & $x = \pm\sqrt{aa} = \pm a$. Donc les tangentes correſpondantes à l'abſciſſe poſitive $+a$ & à l'abſciſſe négative $-a$, ſeront

parallèles aux abſciſſes. Mais pour ſavoir ſi l'ordonnée correſpondante à l'abſciſſe $+a$ eſt un *maximum* ou un *minimum*, je ſubſtitue a à la place de x dans l'équation de la courbe, & j'ai $\frac{a}{a}+\frac{a}{a}=\frac{y}{a}$, ou $2=\frac{y}{a}$, ou $y=2a$. En augmentant l'abſciſſe a d'une quantité infiniment petite dx, & ſubſtituant dans l'équation de la courbe $a+dx$ à la place de x, il vient $\frac{a+dx}{a}+\frac{a}{a+dx}=\frac{y}{a}$; ou (en réduiſant les fractions au même dénominateur, prenant leur ſomme, & faiſant diſparoître le dénominateur de y) $\frac{2aa+2adx+dx^2}{a+dx}=y$; ou $2a+\frac{dx^2}{a+dx}=y$, quantité plus grande que $2a$; Si on diminue l'abſciſſe a de la quantité dx, en mettant $a-dx$ à la place de x, on aura $y=2a+\frac{dx^2}{a-dx}$, qui eſt encore plus grande que $2a$. Donc puiſque les ordonnées croiſſent de deux côtés, il eſt évident que l'ordonnée $2a$ correſpondante à l'abſciſſe a eſt un *minimum*.

Par la même méthode, en prenant l'abſciſſe x négative & $=-a$, l'on aura $y=-2a$; & ſubſtituant $-a+dx$ à la place de x, l'on trouvera $y=-2a+\frac{dx^2}{-a+dx}=-2a-\frac{dx^2}{a-dx}$ (en changeant tous les ſignes du numérateur & du dénominateur, ou, ſi l'on veut, en multipliant le numérateur & le dénominateur par -1). Mais en ſubſtituant $-a-dx$ au lieu de x, l'on aura

aura $y = -2a - \frac{dx^2}{a+dx}$; donc puiſque les ordonnées voiſines de l'ordonnée négative $= -2a$ ſont des quantités négatives toutes les deux plus grandes que $-2a$ (*), l'ordonnée $-2a$ eſt un *minimum* négatif.

Si on propoſoit de déterminer ſi la courbe de l'équation $a^2y = x^2(a-x)$ a quelque *maximum* ou quelque *minimum* d'ordonnée, l'on auroit $a^2dy = 2xdx(a-x) - x^2dx$ qui, en faiſant $dy = 0$, donne $2xdx.(a-x) = x^2dx$, $2ax - 2xx = x^2$, $2ax = 3xx$, équation qui peut avoir lieu, en ſuppoſant $x = 0$. La diviſant par $x = 0$, l'on a $2a - 3x = 0$, $2a = 3x$, $x = \frac{2a}{3}$. La valeur de $x = 0$ fait voir que la ligne des abſciſſes touche la courbe à l'origine des abſciſſes. La deuxiéme valeur de x étant ſubſtituée dans l'équation de la courbe, donne $y = \frac{4a}{27}$; augmentant l'abſciſſe $\frac{2a}{3}$ de la quantité dx, l'on a $a^2y = \left(\frac{2a}{3} + dx\right)^2 \times \left(\frac{a}{3} - dx\right)$; d'où l'on tire $y = \frac{4a}{27} - \frac{dx^2}{a} - \frac{dx^3}{aa}$, quantité plus petite que $\frac{4a}{27}$. Si on diminue l'abſciſſe en ſubſtituant $\frac{2a}{3} - dx$, au lieu de x, on aura $y = \frac{4a}{27} - \frac{dx^2}{a} + \frac{dx^3}{aa}$, qui (à cauſe de $dx^3 < dx^2$) eſt plus petite que $\frac{4a}{27}$. Donc puiſque les ordonnées voiſines de $y = \frac{4a}{27}$ ſont toutes les deux plus petites que $\frac{4a}{27}$, cette ordonnée eſt un *maximum*.

(*) Car il eſt viſible que $-20a - a = -21.a$ eſt une quantité négative plus grande que $-20.a$.

55. PROBLÊME. *Déterminer si dans la courbe de l'équation* $aay = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x$ *il y a quelqu'ordonnée qui soit un* maximum *ou un* minimum. Par la nature de la courbe, en différenciant & supposant $dy = 0$, l'on a $3xxdx - 6axdx + 3aadx = 0$, ou (en divisant par $3dx$) $x^2 - 2ax + aa = 0$, ou (en prenant la racine) $x - a = 0$, & $x = a$: donc la tangente au point de la courbe correspondant à l'abscisse $x = a$, est parallèle aux abscisses. Mais il ne s'ensuit pas pour cela que l'ordonnée correspondante soit un *maximum* ou un *minimum*; car substituant a au lieu de x dans l'équation de la courbe, l'on trouve $y = a$. Substituant $a + dx$ au lieu de x, l'on trouve $y = a + \frac{dx^3}{aa}$. Mais en substituant $a - dx$ au lieu de x, l'on a $y = a - \frac{dx^3}{aa}$. Donc puisque les ordonnées croissent d'un côté, tandis qu'elles diminuent de l'autre, l'ordonnée $y = a$ n'est ni un *maximum* ni un *minimum*.

56. PROBLÊME. *Déterminer si la parabole a quelqu'ordonnée qui soit un* maximum *ou un* minimum. L'équation de la parabole est $y^2 = px$; donc $2ydx = pdx$; supposant $dy = 0$, l'on a $pdx = 0$, d'où on ne peut tirer aucune valeur de x. Supposons donc $dy = \infty$, l'on aura $pdx = \infty$; d'où l'on ne peut non plus tirer aucune valeur de x; ainsi la parabole n'a ni *maximum* ni *minimum*.

57. PROBLÊME. *Déterminer si dans la courbe de l'équation* $ay^2 - 2aay = x^3 - 3ax^2 + 3aax - 2a^3$ *il y a quelqu'ordonnée qui soit un* maximum *ou un* minimum. Différenciant & supposant $dy = 0$, l'on a $3x^2dx - 6axdx + 3aadx = 0$, ou en divisant par $3dx$, $xx - 2ax + aa = 0$, ou (en prenant la racine) $x - a = 0$, & $x = a$. Substituant cette valeur de x dans l'équation de la courbe, l'on a $ay^2 - 2aay = -a^3$,

ou (en divisant par a & transposant) $y^2 - 2ay + aa = 0$; donc (en prenant la racine) $y - a = 0$, $y = a$. Si à la place de x l'on substitue $a + dx$, l'on trouvera $ay^2 - 2a^2y = -a^3 + dx^3$, équation d'où l'on tire (en transposant & divisant par a) $yy - 2ay + aa = \frac{dx^3}{a}$, & en prenant les racines, $y - a = \pm\sqrt{\frac{dx^3}{a}}$, $y = a \pm dx\sqrt{\frac{dx}{a}}$. Si l'on prend donc le signe $+$, l'on aura $y > a$; mais si l'on prend dx avec le signe $-$, c'est-à-dire, si l'on prend $-dx$, l'on aura une quantité imaginaire pour la valeur de y. En effet, $\sqrt{\frac{dx^3}{a}}$ devient dans ce cas $= \sqrt{\left(-\frac{dx^3}{a}\right)}$. Donc la courbe de l'équation proposée n'a ni *maximum* ni *minimum* dans le sens que nous l'entendons ici.

REMARQUE. Si l'équation qui doit donner le *maximum* ou le *minimum* étoit absurde, comme si l'on trouvoit $5a = 2a$, ou $5b = 0$, le *maximum* ou le *minimum* indiqué par cette équation n'auroit pas lieu. Si en augmentant l'abscisse trouvée d'une quantité dx infiniment petite, on trouve une valeur imaginaire de l'ordonnée, ce qui arrive dans une courbe MNm (fig. 34) qui n'a aucun point au-delà de N, tandis que l'on trouveroit une valeur réelle, en diminuant l'abscisse de la quantité dx; c'est une marque que la courbe n'a ni *maximum* ni *minimum* dans le sens qu'on l'entend ici.

Il ne sera pas hors de propos de dire quelque chose de la méthode que l'on peut suivre pour trouver les *maxima* & les *minima* dans les courbes dont les y partent d'un foyer. Pour cela, on cherchera (41) en supposant $dy = 0$ ou $dx = 0$, la tangente perpendiculaire à l'ordonnée, ou bien la tangente parallèle à l'ordonnée, qui se confond souvent avec cette ordonnée; or il est visible que supposer $dx = 0$ dans la fraction $\frac{dy}{dx}$, c'est la même chose que supposer $dy = \infty$.

58. PROBLÈME. *Déterminer si dans la courbe dont l'équation est* $dz = \frac{y^2\,dy}{a\sqrt{(yy - aa)}}$ *il y a quelque* maximum *ou quelque* minimum *d'ordonnée*, dz (*) *désignant un arc infiniment petit*

(*) L'arc dz est le même que celui que l'on a fait $= dx$ (43).

décrit d'un rayon $=y$. Transportez l'équation de la courbe à un arc d'un rayon constant $=a$, en faisant $y:a::dz:dx$, ou $dz=\frac{ydx}{a}$; ce qui donne $\frac{ydx}{a}=\frac{yydy}{a\sqrt{(yy-aa)}}$, $dx=\frac{ydy}{\sqrt{(yy-aa)}}$. Si dans cette équation on suppose $dy=o$, l'on a $dx.\sqrt{(yy-aa)}=o$, $\sqrt{(yy-aa)}=o$, $y^2=aa$, $y=a$. Donc la tangente correspondante à l'ordonnée a lui est perpendiculaire. Pour savoir si l'ordonnée a est un *maximum* ou un *minimum*, il faut intégrer les deux membres de l'équation $dx=\frac{ydy}{\sqrt{(yy-aa)}}=ydy\times(yy-aa)^{-\frac{1}{2}}$. Mais ydy est la différentielle de la quantité variable yy qui est sous le signe, est, dis-je, la différentielle divisée par 2 ou multipliée par $\frac{1}{2}$; donc $x=\frac{ydy.(yy-aa)^{-\frac{1}{2}+1}}{ydy}=(yy-aa)^{\frac{1}{2}}$. En supposant $y=a$, l'on a $x=\sqrt{(yy-aa)}=\sqrt{o}=o$. L'équation $x=(yy-aa)^{\frac{1}{2}}$ donne $x^2=yy-aa$, $y=\sqrt{(xx+aa)}=\sqrt{(oo+aa)}$, en supposant $x=o$. Si l'on augmente x de la quantité infiniment petite dx, l'on aura $y=\sqrt{(dx^2+aa)}>\sqrt{aa}$; si l'on diminue x de la quantité dx, c'est-à-dire si l'on substitue $-dx$ à la place de o, ou de x, l'on trouve $y=\sqrt{(dx^2+aa)}$; donc puisque les ordonnées voisines croissent toutes les deux, l'ordonnée a est un *minimum*.

Pour décrire cette courbe, avec un rayon $=a$ (fig. 40), décrivez un cercle, & prenant le point A pour l'origine des $x=AP$, tirez $CPM=y=\sqrt{(a^2+\overline{AP}^2)}=\sqrt{(aa+xx)}$. Si l'on fait $Ap=-x$ & qu'on tire $Cpm=\sqrt{(aa+\overline{Ap}^2)}=\sqrt{(aa+xx)}$, les points M & m appartiendront à la courbe. En effet de l'équation $y^2=aa+xx$, on tire $x=(yy-aa)^{\frac{1}{2}}$, $dx=\frac{1}{2}\times 2ydy\times(yy-aa)^{-\frac{1}{2}}=\frac{ydy}{\sqrt{(yy-aa)}}$. Maintenant si avec le rayon $CM=y$ l'on décrit l'arc infiniment petit $Mn=dz$, les

secteurs semblables CMn, CPi donneront CM : CP :: dz : Pi $= dx = \frac{adz}{y}$. Substituant cette valeur de dx dans l'équation qu'on vient de trouver, l'on a $\frac{adz}{y} = \frac{ydy}{\sqrt{(yy-aa)}}$, ou $dz = \frac{yydy}{a\sqrt{(yy-aa)}}$, équation de la courbe.

REMARQUE. On peut voir par là que pour déterminer le *maximum* ou le *minimum* dans ces sortes de courbes, il faut, si l'on a l'équation par rapport à un arc décrit d'un rayon variable, la changer en une autre dans laquelle l'arc dx soit décrit avec un rayon constant, intégrer ensuite & voir si en ajoutant & en retranchant l'arc dx, les ordonnées croissent ou décroissent en même temps. Dans le premier cas, l'ordonnée est un *minimum*; mais elle est *maximum* dans le second cas. Si les ordonnées croissent d'un côté & décroissent de l'autre, on n'a ni *maximum* ni *minimum*; mais seulement la courbe de concave devient convexe ou réciproquement, & l'on a un point d'inflexion.

59. PROBLÈME. *Déterminer le* maximum *ou le* minimum *dans la courbe dont l'équation est* $dx = \frac{yydy}{a\sqrt{(aa-yy)}}$, *en supposant* dx *un arc décrit avec le rayon variable* y.

Transportez l'équation à un arc décrit avec le rayon a, en faisant $y : dx :: a : dz$, d'où l'on tire $dx = \frac{ydz}{a}$; donc $\frac{ydz}{a} = \frac{yydy}{a\sqrt{(aa-yy)}}$, $dz = ydy.(aa-yy)^{-\frac{1}{2}}$, $z = -(aa-yy)^{\frac{1}{2}}$, $z^2 = aa-yy$; ainsi z est $= \pm \sqrt{(aa-yy)}$, ce qui fait voir que l'arc z est $= 0$ lorsque $y = a$, & imaginaire si $y > a$. On a aussi $y^2 = aa - z^2$, $y = \sqrt{(aa-zz)} = \sqrt{(aa-oo)} = a$, lorsque l'ordonnée y est la plus grande possible. Si on substitue $o + dz$, ou $o - dz$ à la place de z, l'on a $y = \sqrt{(aa-dz^2)} < \sqrt{aa}$; donc l'ordonnée a est un *maximum*.

Pour décrire cette courbe, on prendra un rayon CA $= a$ (fig. 41), avec lequel on décrira un cercle. Prenant le

point A pour l'origine des arcs $z = AP$, Ap, on tirera les rayons CP, Cp & prenant $Cm = \sqrt{(aa - zz)}$, ou prenant Cm moyenne proportionnelle entre $a + z$ & $a - z$, le point m appartiendra à la courbe. De même prenant Cn $= \sqrt{(aa - \overline{Ap}^2)}$, le point n appartiendra aussi à la courbe. Si l'on prend l'arc $Ag = a = CA$, l'on aura $y = \sqrt{(aa - zz)}$ $= \sqrt{o} = o$, ce qui prouve que la courbe passe par le centre C du cercle générateur. On voit aussi que la tangente AT est perpendiculaire au rayon CA. Si en supposant l'arc dz décrit avec un rayon constant $= a$, on avoit l'équation dz $= \frac{y^2 dy}{(y^3 - a^3)^{\frac{2}{3}}}$, en supposant $dy = o$, l'on auroit $(y^3 - a^3)^{\frac{2}{3}} = o$, $y^3 = a^3$, $y = a$. Mais en intégrant, l'on a $z = S. y^2 dy. (y^3 - a^3)^{-\frac{2}{3}} = 3. (y^3 - a^3)^{\frac{1}{3}}$. Puisque $z = o$ lorsque $y = a$, à la place de z, écrivez $o + dz$, & vous aurez $y = (a^3 + \frac{1}{3} dz^3)^{\frac{1}{3}}$. Mais en écrivant $o - dz$ l'on a $y = (a^3 - \frac{1}{3}. dz^3)^{\frac{1}{3}}$, la premiere valeur est plus grande & la seconde plus petite que a; donc l'ordonnée a n'est ni *maximum* ni *minimum*. Il n'est pas maintenant difficile de voir comment il faut s'y prendre lorsque dy est infiniment plus grand que dx.

60. PROBLÊME. *D'un point donné* L *situé sur l'axe d'une courbe, mener à cette courbe la plus courte ligne* LM *qu'il soit possible* (*fig.* 42). Soit $AL = b$, $AP = x$, $PM = y$: donc $PL = b - x$; mais le triangle rectangle MLP donne $(ML)^2$ $= (PL)^2 + (PM)^2 = bb - 2bx + xx + yy$ $= zz$, en supposant $ML = z$. Si l'on regarde z comme l'appliquée d'une courbe, & qu'on fasse $dz = o$ dans le cas du *minimum*, on aura $-2bdx$ $+ 2xdx + 2ydy = 2z . dz = o$, ydy $= bdx - xdx$ (en transposant & divisant par 2); donc $\frac{ydy}{dx} = b - x = PL$. Or (selon ce qu'on a vu ci-dessus) $\frac{ydy}{dx}$ est la formule de

la sous-normale ; donc P L est la normale. Si du point C situé du côté de la concavité de la courbe, on vouloit mener la plus courte ligne C M, ayant tiré les lignes C*m* parallèle & C*p* perpendiculaire à l'axe, je fais A $p = f$, C$p = m$ P $= c$, & j'ai M$m = y - c$, C$m = p$P$= f - x$; & faisant CM $= z$, il vient $zz = (\text{M}m)^2 + (\text{C}m)^2 = y^2 - 2cy + c^2 + ff - 2fx + xx$. Différenciant & supposant $dz = 0$, j'ai $0 = 2y\,dy - 2c\,dy - 2f\,dx + 2x\,dx$; transposant & divisant par 2, il vient $dy \times (y - c) = dx \times (f - x)$, $\frac{dy}{dx} = \frac{f-x}{y-c}$; en multipliant tout par y, l'on a $\frac{y\,dy}{d-x} = \frac{y \times (f-x)}{y-c}$, d'où l'on tire M$m =$ $y - c$: C$m = f - x :: y =$ PM : PL$= \frac{y\,dy}{dx}$; donc C M est normale.

Si le point N, duquel on veut mener la plus courte ligne est hors de la courbe, ayant abaissé le perpendiculaire N B, je fais la ligne connue (le point N étant donné la distance de ce point à l'axe est censée connue) N B$= c$, A B$= f$, & menant Mn parallèle à l'axe A P, j'ai M$n =$ BP $= x - f$, N$n = c - y$, & faisant la ligne N M $= z$, il vient $z^2 = (\text{N}n)^2 + (\text{M}n)^2 = (c - y)^2 + (x - f)^2$. En différenciant, l'on a $2z\,dz = -2\,dy\,(c - y) + 2\,dx \times (x - f)$. Faisant $dz = 0$, divisant par 2 & transposant, $dx \times (x - f) = dy \times (c - y)$, $\frac{dy}{dx} = \frac{x-f}{c-y}$, $\frac{y\,dy}{dx} = \frac{(x-f).y}{c-y}$, d'où l'on tire $c - y =$ Nn: $x - f =$ nM :: $y =$

MP : PL $= \frac{y\,dy}{dx}$; donc la ligne NM est normale.

Si la courbe avoit une seconde branche As, dont les points correspondans à ceux de la branche AM fussent également éloignés de l'axe AP, il est visible qu'alors Rs normale à la branche As, seroit la plus courte ligne qu'on pourroit mener du point R situé au-dessous de l'axe, à la branche As.

COROLLAIRE. Il est aisé de comprendre que si la ligne AM étoit droite au lieu d'être courbe, la plus courte ligne qu'on pourroit lui mener d'un point quelconque L, C, N seroit la perpendiculaire.

Pour résoudre un grand nombre de questions qui dépendent de la méthode des *maximis* & *minimis*, on exprimera par une fonction de x (*) la quantité qui doit être un *maximum* ou un *minimum*; on la supposera ensuite égale à une puissance de y, que l'on différenciera en s'y prenant comme si l'on vouloit chercher la plus grande ou la plus petite appliquée d'une courbe.

61. PROBLÊME. *Trouver un rectangle qui soit le plus grand de tous ceux dont la somme de la base & de la hauteur est la même &* $=2a$. Soit x, la base du rectangle cherché, retranchant x de $2a$, l'on aura la hauteur $=2a-x$, qui étant multipliée par x, donne $2ax-xx$, surface du rectangle cherché. Je fais cette quantité $=yy$; donc en différenciant & faisant $dy=0$, l'on a $2a\,dx-2x\,dx=0$, $2a=2x$, & $a=x$; donc la base est égale à la hauteur, & le rectangle se change en un quarré dont le côté est $=a$ moitié de la somme $2a$.

REMARQUE. On peut voir aisément que le

(*) Une fonction de x est une expression dans laquelle x entre, soit qu'il y ait des constantes ou non.

résultat seroit le même, en différenciant $2ax - xx$ & supposant sa différentielle $= 0$. Ainsi on peut se dispenser d'introduire y.

COROLLAIRE. Si $2a$ représente une ligne qu'il faille partager en deux parties x & $2a - x$, dont le rectangle doive être le plus grand possible, on trouvera que $x = a$, c'est-à-dire, qu'il faut partager cette ligne en deux parties égales. Si $2a$ représente un nombre qu'on veuille diviser en deux parties x & $2a - x$, de maniere que le produit $2ax - xx$ soit le plus grand possible, l'on aura $x = a$, c'est-à-dire, que les deux parties seront égales, & chacune sera la moitié du nombre proposé; de sorte que si ce nombre est 12, les deux parties seront chacune $= 6$, & le produit 36 sera le plus grand qu'on puisse faire, en prenant pour produisans les deux parties de 12.

Si on doutoit que le résultat fût un *maximum* ou un *minimum*, on substitueroit $a + dx$ dans l'expression $2ax - x^2 = y^2$, & l'on auroit $2a^2 + 2adx - aa - 2adx - dx^2 = aa - dx^2$. Substituant ensuite $a - dx$ au lieu de x, l'on auroit $2aa - 2adx - aa + 2adx - dx^2 = aa - dx^2$, donc puisque les deux résultats sont tous deux plus petits que aa, qui vient de la supposition de $dy = 0$, on a trouvé un *maximum*.

62. PROBLÊME. *Inscrire dans un cercle le plus grand rectangle possible.* Soit supposé (fig. 43) ABnm, le rectangle demandé, ayant mené les diamétres FG, hi parallèles aux côtés du rectangle, ce rectangle sera divisé en quatre rectangles égaux (*), dont l'un sera LCgB; ainsi son

(*) Car un diamétre perpendiculaire à la corde d'un cercle, la divise en deux également. (Voyez la Géométrie).

quadruple ſera évidemment égal au rectangle cherché. Faiſant le rayon du cercle $= a$ & comptant les abſciſſes depuis le centre, l'ordonnée Bg ſera $= \sqrt{(aa - xx)}$, & le rectangle BgCL ſera $= x\sqrt{(aa - xx)}$, dont le quadruple $4x\sqrt{(aa - xx)} = bx\sqrt{(aa - xx)}$, en ſuppoſant $4 = b$, ſera le plus grand rectangle cherché. Différenciant cette quantité & ſuppoſant la différentielle $= 0$, l'on aura $bdx\sqrt{(aa - xx)}$ $- bxxdx(aa - xx)^{-\frac{1}{2}} = 0$, ou en diviſant par bdx & tranſpoſant, $\sqrt{(aa - xx)} = xx.(aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$; multipliant tout par $(aa - xx)^{\frac{1}{2}}$, il vient $aa - xx = xx.(aa - xx)^{0} = xx$; donc $aa = 2xx$, $x^2 = \frac{aa}{2}$, $x = \sqrt{\frac{aa}{2}}$. Subſtituant cette valeur dans $4x\sqrt{(aa - xx)}$, il vient $4\sqrt{(aa - \frac{aa}{2})} \times \frac{aa}{2} =$ BAmn, & l'on a B$g =$ $\sqrt{(aa - xx)} = \sqrt{(aa - \frac{1}{2}aa)} = \sqrt{\frac{aa}{2}} = x$; donc le rectangle B$g$CL a ſes deux côtés B$g$, C$g$ égaux; donc ce rectangle & par conſéquent ſon quadruple, eſt un quarré; donc le plus grand rectangle qu'on puiſſe inſcrire dans un cercle, eſt le quarré.

63. REMARQUE. La valeur de x, que nous venons de trouver, ſeroit la même, ſi avant de différencier on eût ôté le multiplicateur conſtant b. Ainſi on peut en uſer de même toutes les fois qu'il s'agit de trouver un *maximum* ou un *minimum*. En effet, ſuppoſons que $\frac{a}{b}$ y repréſente une quantité qui doive être un *maximum* ou un

minimum, sa différentielle, en faisant $dy = 0$, sera $\frac{a}{b} dy = \frac{a}{b} \times 0 = 0$, la même qu'on eût trouvé en ôtant les facteurs a & $\frac{1}{b}$. Si cette différentielle est supposée $\frac{a}{b} dy = \frac{m(c-x)^m dx}{(a-x)^n}$, & qu'alors on suppose $dy = \infty$, l'on aura $(a-x)^n = 0$, $a-x=0$, $x=a$, la même que si y seul eût dû être un *maximum* ou un *minimum*; on peut donc avant de différencier ôter les multiplicateurs & les diviseurs constans de la quantité qui doit être un *maximum* ou un *minimum* : ce qui sert à simplifier le calcul.

64. PROBLÈME. *Trouver la plus courte ligne FM qu'on puisse mener entre les côtés indéfinis d'un angle droit FBM par un point D situé entre ses côtés (fig. 44).* Ayant fait le rectangle DCBA, soit $AB = a$, $BC = b$, $AF = x$, on aura $(FD)^2 = (AF)^2 + (AD)^2 = (AF)^2 + (BC)^2 = x^2 + b^2$, & $FD = \sqrt{(b^2 + xx)}$. Mais à cause des triangles semblables FAD & FBM, on a FA : FD :: FB : FM, ou $x : \sqrt{(bb+xx)} :: a+x : FM = \frac{a+x}{x} \times \sqrt{(bb+xx)}$. Supposant cette quantité $= y$ & différenciant, il vient $dy = \frac{(xdx - adx - xdx)}{x^2} \times \sqrt{(bb+xx)} + \frac{(a+x)}{x} \times \frac{1}{2} \times 2x.dx.(bb+xx)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{adx}{xx} \times \sqrt{(bb+xx)} + \frac{axdx + xxdx}{x\sqrt{(bb+xx)}}$. En réduisant au même dénominateur, l'on a $dy = \frac{-abbdx - axxdx + axxdx + xxxdx}{x^2 \sqrt{(bb+xx)}}$. Réduisant & supposant $dy = 0$, ôtant le dénominateur & divisant par dx, il vient $-abb + x^3 = 0$, $x^3 = abb$ & $x = \sqrt[3]{abb}$. Si donc on cherche deux moyennes proportionnelles entre b

& a, la premiere sera $= x$ (*); prenant donc AF égale à cette premiere moyenne proportionnelle, par les points F & D, on tirera FDM, qui sera la ligne cherchée. Si dans l'expression $\frac{-abbdx - ax^2dx + axxdx + x^3dx}{x^2\sqrt{(bb+xx)}} = dy$ $= \frac{-abbdx + x^3dx}{x^2\sqrt{(bb+xx)}}$ on suppose dy infini, l'on aura $x^2\sqrt{(bb+xx)} = 0$, $bb + xx = 0$, $xx = -bb$, $x = \pm\sqrt{(-bb)}$, quantité imaginaire qui fait voir qu'il n'y a pas d'autre *minimum* que celui qui est indiqué par $x = \sqrt[3]{(abb)}$.

REMARQUE. Pour avoir x, on décrira autour de l'axe AM (fig. 45) avec un paramétre $= b$ la parabole ADP; prenant $AB = \frac{b}{2}$ & menant BC perpendiculaire à l'axe AM & $= \frac{a}{2}$, du point C avec le rayon CA, on décrira un arc de cerle AND, qui rencontrera la demi-parabole AP en un point D; & l'ordonnée DM sera $= x$. En effet, $DF = DM - CB = x - \frac{a}{2}$. Mais par la nature de la parabole, $AM \times b = (DM)^2$, ou $(AM) = \frac{xx}{b}$; donc $BM = \frac{b}{2} - \frac{xx}{b}$. Et parce que $CF = BM$, l'on aura $(CD)^2 = (x - \frac{a}{2})^2 + (\frac{b}{2} - \frac{xx}{b})^2$, quantité qui se réduit à $- ax + \frac{a^2}{4} + \frac{x^4}{bb} + \frac{b^2}{4}$. De plus, $CD = CA$, & $(CA)^2 = (AB)^2 + (CB)^2 = \frac{bb}{4} + \frac{aa}{4}$; donc $\frac{bb}{4}$

(*) Soit x la premiere, z la seconde moyenne proportionnelle cherchée; donc on aura $\div b : x : z : a$ (voyez le calcul); & $b^3 : x^3 :: b : a$, $b^3 a = x^3 b$, $x^3 = b^2 a$, & $x = \sqrt[3]{bba}$.

$+ \frac{aa}{4} = -ax + \frac{x^4}{bb} + \frac{aa}{4} + \frac{b^2}{4}$; donc transposant & réduisant, $\frac{x^4}{bb} = ax$, $x^4 = bbax$, $x^3 = bba$, $x = \sqrt[3]{abb}$; donc DM $= x$.

REMARQUE. La progression ÷ $b : x : z : a$ (derniere note) donne $b : a :: b^3 : x^3$, & en renversant la proportion, $x^3 : b^3 :: a : b$; donc si a est double, ou triple, ou quadruple, &c. de b, le cube de x sera double, ou triple, ou quadruple, &c. de celui de b; donc on peut facilement résoudre le problême de la duplication du cube par le moyen du cercle & de la parabole.

65. PROBLÊME. *Inscrire le plus grand triangle possible dans un demi-cercle ABm (fig. 46).* Soit le diamétre A$m = a$, & le côte AB $= x$. Puisque l'angle B appuyé sur le diamétre est droit, le triangle ABm sera rectangle, & l'on aura $(Bm)^2 = (Am)^2 - (BA)^2$, $Bm = \sqrt{(aa - xx)}$ & le triangle ABm sera $= \frac{1}{2}$ AB. B$m = \frac{1}{2} x \sqrt{(aa - xx)}$, dont la différence égalée à o, donne $\frac{dx}{2} \times \sqrt{(aa - xx)} + \frac{1}{2} . \frac{1}{2} x \times -2x\, dx \times (aa - xx)^{-\frac{1}{2}} = 0 = \frac{dx}{2} . \sqrt{(aa - xx)} - \frac{x\,dx}{2\sqrt{(aa - xx)}} = 0$, ou en réduisant au même dénominateur, $\frac{aa\,dx - 2xx\,dx}{2\sqrt{(aa - xx)}} = dy = 0$; donc $aa - 2xx = 0$, $aa = 2xx$, $xx = \frac{aa}{2}$, $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$

Substituant cette valeur dans B$m = \sqrt{(aa - xx)}$, l'on a B$m = \sqrt{\left(\frac{2aa}{2} - \frac{aa}{2}\right)} = a\sqrt{\frac{1}{2}}$; donc BA $=$ Bm, c'est-à-dire, que le triangle

isocelle est le plus grand qu'on puisse inscrire dans un demi-cercle.

Si on supposoit $dy = \frac{aadx - 2xxdx}{2\sqrt{(aa - xx)}} = \infty$, l'on auroit $2\sqrt{(aa - xx)} = 0$, $aa - xx = 0$, $aa = xx$, $a = x$; donc le côté AB seroit égal au diamétre Am, avec lequel il se confondroit; & par conséquent il n'y auroit point de triangle, ou, si l'on veut, le triangle seroit$=0$; ainsi on ne peut avoir aucune autre solution admissible de ce problême que celle qu'on vient de donner.

66. PROBLÊME. *Inscrire dans une sphère un cône dont la surface convexe soit la plus grande possible* (*fig.* 47). Soit le diamétre de la sphère $= a$, la hauteur AD (du cône cherché CAm) $= x$; la surface convexe de ce cône étant égale au produit de la circonférence décrite du rayon DC multipliée par la moitié de AC, & les circonférences étant dans le rapport des rayons, la surface cherchée sera proportionnelle à $CD \times AC$. Or $AC = \sqrt{(a.x)}$ & $CD = \sqrt{(ax - xx)}$, comme tout le monde le sait; donc $AC.\,CD = \sqrt{.ax} \times \sqrt{(a.x - xx)} = \sqrt{(a^2xx - ax^3)}$; donc puisque cette quantité doit être un *maximum*, son quarré $a^2xx - ax^3$ le sera aussi; donc $2a^2xdx - 3ax^2dx = 0$, $2a - 3x = 0$, $2a = 3x$, & $x = \frac{2a}{3}$; ainsi l'axe du cône cherché doit être les deux tiers du diamétre de la sphère.

REMARQUE. Dans le dernier problême, nous avons pris la différentielle, non de la surface du cône, mais d'une quantité proportionnelle à cette surface ou qui étoit en raison donnée avec cette surface; or c'est ce qui est toujours permis dans le cas du *maximum* ou du *minimum*; car soit supposés

une quantité quelconque $cx - x^3 = y$, dont on veut avoir le *maximum* ou le *minimum*. Si au lieu de différencier cette quantité, je différencie la quantité $\frac{b}{a}(cx - x^3)$, qui lui eſt proportionnelle, ou qui eſt à la quantité propoſée dans le rapport de $a : b$, puiſque l'on a $a : b :: cx - x^3 : \frac{b}{a} \times (cx - x^3)$, l'on aura (63) la même valeur de x. Cette remarque peut être utile dans pluſieurs cas.

67. PROBLÊME. *Sur la droite Am comme hypothénuſe, conſtruire le plus grand triangle rectangle poſſible* (*fig.* 46). Soit la droite $Am = a$, le côté $AB = x$; donc l'autre côté ſera $= \sqrt{(aa - xx)}$, & multipliant $\frac{AB}{2}$ par Bm, l'on aura $\frac{x}{2} \times \sqrt{(aa - xx)}$ pour l'expreſſion de la ſurface du triangle; donc en opérant comme ci-deſſus (65), on aura $AB = Bm = \sqrt{\frac{aa}{2}}$; c'eſt-à-dire, que le plus grand triangle cherché doit être iſocelle. Donc ſi ſur le diamétre Am on conſtruit un demi-cercle & que du milieu B de ce demi-cercle on tire les cordes BA, Bm, on aura le triangle cherché.

68. PROBLÊME. *Inſcrire un cylindre bnmf* (*fig.* 48) *dans une ſphère, de maniere que ce cylindre ait la plus grande ſurface convexe poſſible.* Soit le rayon Ca de la ſphère $= a$, & ſuppoſons que Pp répréſente l'axe du cylindre, CP étant $= x$, l'on aura $(Pm)^2 = aa - xx$, par la propriété du cercle; or la circonférence du cercle décrit avec le rayon Pm, eſt comme cette ligne. De plus, il eſt viſible que $Pp = 2x$ (car ſi du centre C on tire Cs perpendiculaire ſur nm, $nm = pP$, ſera coupée en deux également en s); donc la quantité $2x . \sqrt{(aa - xx)}$ eſt proportionnelle à la

ſurface convexe du cylindre cherché; ainſi en faiſant $y = 2x . \sqrt{(aa - xx)}$, ou $yy = 4xx\,aa - 4x^4$, l'on aura $2y\,dy = 0 = 8\,x . aadx - 16\,x^3\,dx$, $aa - 2xx = 0$, $aa = 2xx$, $x^2 = \frac{aa}{2}$, & $x = \sqrt{\frac{aa}{2}}$. Prenant donc $CP = \sqrt{\frac{aa}{2}}$, ou prenant CP moyenne proportionnelle entre a & $\frac{a}{2}$, l'on aura le point P, par lequel menant l'ordonnée Pm, le cercle du rayon Pm ſera la baſe, & Pp l'axe du cylindre cherché.

REMARQUE. Si la courbe Amfb étoit une ellipſe dont le demi-grand axe fût $= a$, & le demi-petit axe $= b$, l'on auroit $Pm = \frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)}$; & multipliant cette quantité par $2x$, le produit ſeroit proportionnel à la ſurface du cylindre inſcrit dans l'ellipſoïde. Or, ce produit eſt en raiſon donnée avec celui que l'on vient de trouver pour la ſphère; donc (remarque du n°. 66) on trouveroit la même valeur de x. L'on trouveroit auſſi la même valeur de x, s'il s'agiſſoit d'inſcrire le plus grand rectangle dans une ellipſe; car ce rectangle ſeroit $= 2\,Pm \times 2x = 4x\,\frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)}$; donc on aura le plus grand rectangle qu'on puiſſe inſcrire dans une ellipſe, & le cylindre de la plus grande ſurface convexe qu'on puiſſe inſcrire dans une ellipſoïde, en prenant $CP = x = \sqrt{\frac{aa}{2}}$. Subſtituant cette valeur dans celle de $(Pm)^2$, on a $(Pm)^2 = \frac{bb}{aa} \times \frac{aa}{2} = \frac{bb}{2}$, & $Pm = \sqrt{\frac{bb}{2}}$, qui eſt moyenne proportionnelle entre b & $\frac{b}{2}$.

Mais

Mais la solidité du cylindre inscrit dans la sphère étant proportionnelle à $2x.\overline{Pm}^2$ ou à $2aax - 2x^3$; pour avoir le plus grand cylindre qu'on puisse inscrire dans une sphère, on égalera à o la différentielle de cette quantité, ce qui donnera $2aadx - 6x^2dx = 0$, $x = \sqrt{(\frac{a}{3}.a)}$, & $2x = 2.\sqrt{(\frac{a}{3}.a)}$. Telle sera la hauteur du plus grand cylindre qu'on peut inscrire dans une sphère dont le rayon $= a$. A l'égard du rayon de sa base, il est aisé de voir que Pm est alors $= \sqrt{(\frac{2a}{3}.a)}$.

69. PROBLÊME. *Diviser une ligne Ab (fig. 49) en deux parties en c, de maniere que le produit de $(Ac)^m$ par $(cb)^n$ soit le plus grand possible.* Soit la ligne $Ab = a$, $Ac = x$; donc $cb = a - x$; donc en faisant $y = x^m(a-x)^n$, l'on aura $dy = 0 = mx^{m-1}dx \times (a-x)^n - nx^m dx(a-x)^{n-1} = 0$; donc transposant & divisant par $x^{m-1} \times (a-x)^{n-1}dx$, il vient $ma - mx = nx$, $ma = mx + nx$, $x = \frac{ma}{m+n}$; donc si $m = 2$ & $n = 1$, l'on a $x = \frac{2a}{3}$; c'est-à-dire, le plus grand parallèlipipède qu'on puisse former, en prenant pour base le quarré de la partie Ac, & pour hauteur le reste de la ligne Ab, aura lieu, lorsque Ac sera les $\frac{2}{3}$ de la ligne Ab. Si $m = n = 1$, x sera $= \frac{a}{2}$; ainsi le plus grand rectangle qu'on puisse faire avec les deux parties d'une ligne a, aura lieu, lorsque ces parties seront égales; si a représente un nombre & qu'on suppose $m = 3$ & $n = 2$, l'on aura $x = \frac{3a}{5}$, & par conséquent $cb = a - x = \frac{2a}{5}$; donc le plus grand pro-

duit qu'on puisse faire en divisant un nombre en deux parties & multipliant le cube de l'une par le quarré de l'autre, aura lieu lorsque la premiere partie sera les $\frac{3}{5}$ de ce nombre, & la seconde les deux cinquiémes; c'est pourquoi si le nombre donné est 10, la premiere partie sera $= 6$, & la seconde $= 4$, & le produit du cube 216 par le quarré 16 ou 3456 est le plus grand produit qu'on puisse faire de cette maniere. Si n étoit un nombre négatif, la quantité $x^m (a - x)^n$ seroit alors un *minimum*. Par exemple, supposant $m = 3$ & $n = -2$, l'on auroit $x = 3a$, & $x^m (a - x)^n$ $= (3a)^3 . (-2a)^{-2} = \frac{27aaa}{4aa} = \frac{27a}{4}$, qui seroit un *minimum*. Si $n = -1$ & $m = 2$, l'on aura $\frac{x^2}{a - x}$, qui, en supposant $x = \frac{2a}{2 - 1} =$ $2a$, devient $= \frac{4aa}{a - 2a} = \frac{4aa}{-a} = -4a$. Donc alors le point cherché C se trouvera sur le prolongement de la ligne Ab, de maniere que A C sera $= 2a = \frac{ma}{m - n} = 2a$. Si on suppose le dénominateur $a - x = 0$, l'on a $\frac{4aa}{a - a} = \frac{4aa}{0}$ $= \infty$; donc il y a un *maximum* pour ce cas. En effet, si l'on suppose x moindre ou plus grand que a, l'on trouve une quantité plus petite qu'en supposant $x = a$.

70. PROBLÊME. *Diviser une ligne a en trois parties $A = x$, $B = z$, $C = a - x - z$ telles que leur produit $g = x^m z^n (a - x - z)^r$ soit le plus grand possible.* Je différencie le produit g, en regardant d'abord z comme constant, & j'ai $m\,dx . x^{m-1} z^n$

$\times (a - x - z)^r - r\,dx.x^m z^n (a - x - z)^{r-1} = 0$. Divisant par $dx\, x^{m-1} z^n \times (a - x - z)^{r-1}$, il vient $m.(a - x - z) - rx = 0$, d'où l'on tire $x = \frac{ma - mz}{m + r}$. Cette valeur de x étant substituée dans le produit g, donnera en ôtant le facteur constant, $z^n (a - z)^{m+r}$. La différentielle de cette quantité étant divisée par $dz.\, z^{n-1}$ & égalée à 0, donne $na - nz - mz - rz = 0$, ou $z = \frac{na}{m + n + r}$. Substituant cette valeur dans celle de x, l'on trouve $A = \frac{ma}{m + n + r}$. Substituant la même valeur de z & celle de x, que nous venons de trouver dans celle de C, on a $C = \frac{ra}{m + n + r}$. Si $m = n = r = 1$, les trois parties seront égales, & chacune sera le tiers de la ligne a; c'est la même chose s'il s'agit d'un nombre. Si l'on veut diviser une ligne ou un nombre a en quatre parties $A = x$, $B = z$, $C = u$, $D = a - x - z - u$, telles que le produit de $A^m B^n C^r D^s$, soit un plus grand, en faisant $m + n + r + s = t$, on aura $A = \frac{ma}{t}$, $B = \frac{na}{t}$, $C = \frac{ra}{t}$, $D = \frac{sa}{t}$; de sorte que les parties de la ligne ou du nombre a sont entr'elles comme les exposans de ces parties; ce qui a lieu, quel que soit le nombre des parties. Si le nombre donné est $= 6$, & que $m = 3$, $n = 2$, $r = 1$, les trois parties seront $3, 2, 1$, & le produit du cube de la premiere par le quarré de la seconde, & la premiere puissance de la troisiéme sera $= 108$, qui est le

plus grand produit qu'on puisse faire avec les trois parties de 6, en multipliant le cube de la premiere par le quarré de la seconde, & la premiere puissance de la troisiéme.

On peut remarquer que lorsque la quantité cherchée répond à plusieurs inconnues qui dépendent l'une de l'autre, on peut les supposer l'une après l'autre variables & les autres constantes, & mettre les valeurs trouvées dans la premiere expression jusqu'à ce qu'il n'y ait qu'une inconnue, & alors on trouvera la quantité cherchée par la méthode qu'on a suivie dans le problême.

71. **Problême.** *De tous les triangles qu'on peut construire sur la même base* A m *& de même périmètre, quel est celui dont la surface est la plus grande* (*fig.* 50)? Soit le périmètre $= 2p$, la base A $m = a$, le côté A $b = x$, le côté $b\,m$ sera $= 2p - a - x$. Or (selon ce qu'on a dit dans la Géométrie) la surface cherchée est $= \sqrt{p.(p-a).(p-x).(a+x-p)}$. Supposant cette quantité $= y$ & quarrant, il vient $p \times (p-a) \times (p-x) \times (a+x-p) = y^2$ ou en exprimant le logarithme par L & se souvenant que la somme des logarithmes des produisans est égale au logarithme du produit, $L.p + L.(p-a) + L.(p-x) + L.(a+x-p) = 2\,L.y$, & parce que p & a sont des quantités constantes, $\frac{-dx}{p-x} + \frac{dx}{a+x-p} = \frac{2dy}{y} = 0$, en faisant $dy = 0$; donc $\frac{1}{a+x-p} - \frac{1}{p-x} = 0$ ou $\frac{1}{a+x-p} = \frac{1}{p-x}$ ou $p - x = a + x - p$; donc $2p - a = 2x$; ainsi les côtés Ab & bm sont égaux, & le triangle cherché est isocelle.

Corollaire. Donc entre tous les triangles de même périmètre $2p$, celui qui a le plus de surface est équilatéral. Car si Amb est le triangle cherché, quelle que soit sa base Am, les deux autres côtés doivent être égaux, selon ce qu'on vient de dire; donc en appellant $2x$ cette base, $2p - 2x$ sera l'expression de la somme des deux autres côtés, & $p - x$ sera l'expression de chacun de ces côtés. Donc la surface y sera $=$

$\sqrt{p.(p-2x).(x).(x)}$; $2 L.y = L.p + L.(p-2x)$ $+ 2. L. x$, $\frac{2dy}{y} = 0 = \frac{-2dx}{p-2x} + \frac{2dx}{x}$, $\frac{-2}{p-2x} + \frac{2}{x} = 0$, $\frac{2}{x} = \frac{2}{p-2x}$, $p - 2x = x$, $p = 3x$, $x = \frac{p}{3}$ & $2x = \frac{2p}{3}$; donc la base est le tiers du périmêtre, & comme chacun des autres côtés est $= p - x = p - \frac{p}{3} = \frac{3p-p}{3} = \frac{2p}{3}$, le triangle doit être équilatéral.

72. PROBLÊME. *Entre tous les parallelipipèdes égaux à un cube donné* b^3 *& qui ont pour un de leurs côtés la ligne a, trouver celui qui a la plus petite surface.* Soit x l'un des côtes cherchés, le produit $a.x$ sera égal à une des faces qu'on peut considérer comme la base; divisant la solidité b^3 par la base ax, l'on a la hauteur $\frac{b^3}{ax}$. Multipliant cette hauteur par a & par x, on aura deux produits, dont la somme sera la moitié de la surface latérale; donc $ax + \frac{b^3}{x} + \frac{b^3}{a}$ est la moitié de la surface. Egalant à 0 la différentielle de cette quantité, l'on a $adx - \frac{bbbdx}{xx} = 0$, $a = \frac{b^3}{x^2}$, $x^2 = \frac{b^3}{a}$, $x = \sqrt{\frac{b^3}{a}}$; donc le côté $\frac{b^3}{ax} = \sqrt{\frac{b^6}{aaxx}} = \sqrt{\frac{b^3}{a}}$; donc un des côtés $= a$ & les deux autres, sont chacun $=$ $\sqrt{(\frac{b^3}{a})}$.

73. PROBLÊME. *Entre tous les parallélipipèdes égaux au cube* b^3, *quel est celui de la moindre surface?*

Si on nomme un des côtés x, chacun des autres sera $\sqrt{\frac{b^3}{x}}$, comme il suit de ce qu'on vient de dire (*); ainsi en prenant la somme des produits des trois côtés, l'on aura la demi-superficie (**) $= 2x\sqrt{\frac{b^3}{x}} + \sqrt{\frac{b^3}{x}} \times \sqrt{\frac{b^3}{x}} = 2\sqrt{(b^3 x)} + \frac{b^3}{x} = y$, $dy = 0 = \frac{b^3 dx}{\sqrt{(b^3 x)}} - \frac{b^3 dx}{x^2}$; donc $x^2 = \sqrt{(b^3 x)}$, $x^4 = b^3 x$, $x^3 = b^3$, $x = b$; donc le côté $x = b$; & comme chacun des autres est $= \sqrt{\frac{b^3}{x}} = \sqrt{\frac{b^3}{b}} = \sqrt{b^2} = b$, il est visible que le cube proposé satisfait à la question.

74. PROBLÊME. *Entre tous les cônes qui ont la même solidité donnée, trouver celui de la moindre surface convexe.* Soit y le rayon de la base, x la hauteur, $\sqrt{(yy + xx)}$ sera le côté du cône; & faisant $1 : c :: y : cy$, on aura la circonférence du rayon y, c étant la circonférence du rayon $= 1$; donc $cy\sqrt{(yy + xx)}$ sera comme la surface cherchée, que je suppose $= z$. Donc en omettant le facteur constant, $z^2 = y^4 + xxy^2$, différenciant & supposant $dz = 0$, l'on a $2z.dz = 0 = 4y^3 dy + 2xyydx + 2x^2 ydy$. Maintenant la solidité étant comme le produit de la base (qui est comme le quarré du rayon y) & de la hauteur, l'on a la solidité proportionnelle à xyy. Mais la solidité est constante par la supposition; donc la différentielle de $y^2 x$ sera $= 0$; ainsi $2yxdy + y^2 dx$

(*) Il n'y a qu'à changer a en x.

(**) Car pour avoir la surface totale, il faut doubler la base & prendre deux fois le produit d'un côté de la base par la hauteur, à cause des deux faces opposées égales.

$= 0$, $y\,dx = -2\,x\,dy$. Subſtituant cette valeur de $y\,dx$ dans la différentielle de la ſurface, l'on a $4y^3\,dy - 4x^2\,y\,dy + 2\,x^2\,y\,dy = 0$, ou $4y^2 - 2\,x^2 = 0$, $4\,y^2 = 2\,x^2$, $2y^2 = x\,x$; donc le quarré du rayon de la baſe doit être la moitié du quarré de la hauteur.

Si étant donnée la ſolidité d'un vaſe cylindrique rempli d'eau, on demande quelles doivent être ſes dimenſions pour qu'il contienne une quantité de liquide donnée, ſa ſurface interne étant la plus petite poſſible, on fera $= a^3$ la quantité donnée de liquide, ou la ſolidité ou le volume de l'eſpace intérieur du vaſe, x le diamêtre intérieur, z la hauteur intérieure, & le rapport du diamêtre à la circonférence $= 1 : c$. La baſe du vaſe ſera donc $\frac{c\,x^2}{4}$, ſa capacité $= a^3 = \frac{c\,x^2\,z}{4}$, & la ſurface concave $= c\,x\,z$. A cauſe de $a^3 = \frac{c\,x^2\,z}{4}$, ou de $z = \frac{4\,a^3}{c\,x^2}$, on aura $c\,x\,z = \frac{4\,a^3}{x}$. Or la ſurface de la baſe eſt $= \frac{c\,x^2}{4}$; donc la ſurface cherchée eſt $\frac{4\,a^3}{x} + \frac{c\,x^2}{4}$, qui doit être un *minimum*; ainſi l'on aura $\frac{-4\,a^3\,dx}{x^2} + \frac{c\,x\,dx}{2}$ $= 0$ ou $-4\,a^3 + \frac{c\,x^3}{2} = 0$ ou $c\,x^3 = 8\,a^3$ ou $x^3 = \frac{8\,a^3}{c}$, $x = \frac{2\,a}{\sqrt[3]{c}}$, & $z = \frac{4\,a^3}{c\,x^2}$ $= \frac{a\sqrt[3]{c^2}}{c} = \frac{a\sqrt[3]{c^3}}{\sqrt[3]{c}\,\sqrt[3]{c^3}} = \frac{a}{\sqrt[3]{c}}$. Donc la hau-

teur intérieure de ce vaſe doit être égale au demi-diamètre de ſa baſe intérieure, & ſa ſurface concave doit être $= \frac{4a^3}{x} + \frac{cx^2}{4} = 2aa \times \sqrt[3]{c} + a^2 \sqrt[3]{c} = 3a^2 \sqrt[3]{c}$.

75. PROBLÊME. *Dans un triangle trouver un point o (fig. 51) tel que la ſomme des lignes tirées de ce point aux trois angles ſoit un* minimum. Du point b je décris un arc de cercle qui paſſe par le point o cherché ; ſuppoſant le rayon de cet arc conſtant & $= g$, $ao = y$, $oc = x$, j'ai $g + y + x$, qui doit être un moindre. Donc $dy + dx = 0$, $dy = -dx$; donc en ſuppoſant que l'arc infiniment petit oi, qu'on peut regarder comme une ligne droite, repréſente la différence de l'arc fo, les parties on, om des lignes ao, co, compriſes entre le point o, & les lignes im, in tirées perpendiculairement ſur co & ao, pourront repréſenter les différences de ces lignes, qui par conſéquent ſont égales, & l'angle $noi = moi$ (*). Mais ces angles étant ajoutés aux angles droits iob, bor (on doit faire attention que les angles ion, tor ſont oppoſés au ſommet, & par conſéquent égaux, & qu'ainſi on peut ajouter tor au lieu de ion), donneront les angles boc, boa égaux. En concevant un arc de cercle décrit du point a, on prouvera de même que les angles aob, aoc ſont égaux ; donc les angles que doivent faire entr'elles les lignes tirées du point o aux trois angles du triangle, ſont égaux ; & comme ces angles valent 360°, chacun eſt de 120°.

(*) Si du quarré de l'hypoténuſe oi l'on ôte les quarrés des côtés on, om, les racines des reſtes égaux donneront les côtés égaux in, im ; donc les triangles omi, oni ont tous leurs côtés égaux auſſi bien que leurs angles.

REMARQUE. Le problême n'eſt pas toujours poſſible. Car ſi le triangle abc étoit iſocelle de maniere que l'angle acb fût de 140°, le point o tomberoit en dehors du triangle acb; ainſi il n'y auroit aucun point o dans le triangle propoſé, duquel on peut mener les lignes oc, ob, oa; de maniere que les angles que formeroient ces lignes fuſſent de 120° degrés chacun.

76. PROBLÊME. *Inſcrire dans un cercle le plus grand triangle poſſible.* Si on conçoit pluſieurs triangles décrits ſur la même corde AD (fig. 52), il eſt aiſé de déterminer le plus grand; car ayant diviſé AD en deux parties égales en m & par le centre C tiré la ligne Cm, qui rencontre la circonférence en B, le triangle BAD ſera le plus grand qu'on puiſſe conſtruire ſur la corde AD; car la baſe étant la même, les triangles ſeront comme les hauteurs ou les perpendiculaires ſur cette baſe. Or Bm eſt évidemment la plus grande perpendiculaire qu'on puiſſe abaiſſer d'un point quelconque de la circonférence ſur la corde AD; donc le triangle demandé doit être iſocelle. Soit le rayon du cercle $= a$, l'abſciſſe C$m = x$; donc par la nature du cercle, $m\text{D} = \sqrt{(aa - xx)}$, & le triangle BAD ſera $= (a+x) . \sqrt{(aa-xx)}$, que je ſuppoſe $= y$; donc $y^2 = (a+x)^2 \times (aa-xx)$, & $2ydy = 0 = 2dx \times (a+x) \times (aa-xx) - 2xdx . (a+x)^2 = 0$; donc $2.(a+x).(aa-xx) = 2x(a+x)^2$, $(aa-xx) = x \times (a+x)$, ou en diviſant tout par $a+x$, $a-x=x$, $a=2x$, $x=\frac{a}{2}$; diviſant donc CF en deux parties égales en m & menant la corde AmD perpendiculairement à CF, le triangle ADB ſera le plus grand triangle

cherché; or ce triangle est équilatéral, & chaque côté est $= a\sqrt{3}$; ce qu'on trouvera aisément, en substituant la valeur de x dans celle de mD & doublant; car $m\text{D} = \sqrt{(aa - xx)} = \sqrt{\frac{3aa}{4}}$ $= \frac{1}{2} a.\sqrt{3}$ dont le double $= a\sqrt{3}$. De même si on substitue les valeurs de Bm & de mD dans DB $= \sqrt{(m\text{D})^2 + (\text{B}m)^2}$, on aura DB $=$ AB $=$ $a.\sqrt{3}$. On peut sur la corde AD inscrire un autre triangle isocelle AFD, hors duquel se trouve le centre du cercle; mais celui-ci, parce que Cm augmentant ou diminuant, le triangle augmente ou diminue, n'est ni un *maximum* ni un *minimum*.

77. PROBLÊME. *Circonscrire à un cercle le plus petit triangle possible* (*fig.* 53). Supposons que le triangle Agf soit le triangle demandé, je dis que si par le sommet de l'angle A & le centre c du cercle on mene la ligne Acn, le côté gf sera perpendiculaire à cette ligne, & la rencontrera en n, de maniere que le triangle Agf sera isocelle. Car si on mene une autre tangente sLh, le triangle Ahs sera plus grand que Agf. Pour le prouver, je tire la ligne fm parallèle à sg; & les triangles sig, fmi étant semblables, l'on a $fi : gi :: fm : gs$; mais $fi > gi$; donc $fm > gs$. D'ailleurs $fi : ig :: im : si$; donc $mi > is$; donc à plus forte raison $ih > is$; & partant $fm \times hi > gs \times si$. Mais le triangle ifh est comme le produit $ih.fm$, & le produit $gs \times si$ est comme le triangle gsi (*). Donc le triangle

(*) Car si des angles g & f on abaissoit des perpendiculaires sur les côtés opposés, ces perpendiculaires qui seroient les hauteurs des triangles, seroient dans le rapport des côtés homologues (voyez la Géométrie).

$ifh > isg$, & en ajoutant le quadrilatère A sif, l'on aura A$sh >$ Agf; ainsi Agf est le plus petit triangle possible. Maintenant pour déterminer le point A duquel en menant les tangentes Ag, Af, qui, avec la tangente gf, doivent donner le plus petit triangle cherché, par le point n & le centre c, je mene la ligne ncA & supposant $c\text{A} = x$, le rayon $cb = a$; j'ai A$n = x + a$, $p\text{A} = x - a$, A$b = \sqrt{(xx - aa)}$; or Ab : cb :: An : gn (à cause des triangles rectangles semblables Abc, Agn) ou $\sqrt{(xx - aa)} : a :: x + a : gn = \frac{a(x+a)}{\sqrt{(xx-aa)}}$. Multipliant cette quantité par $x+a$, l'on a le triangle cherché $= a. \frac{(x+a)^2}{\sqrt{(xx-aa)}} = y$, $y^2 = \frac{aa.(x+a)^4}{xx-aa} = \frac{aa.(x+a)^3}{x-a}$, $2ydy = 0 = \frac{3.aadx.(x+a)^2.(x-a) - aadx.(x+a)^3}{(x-a)^2}$ ou $3.(x+a)^2.(x-a) = (x+a)^3$, $3.(x-a) = x+a$, $3x - x = a + 3a$, ou $2x = 4a$, $x = 2a$. C'est pourquoi prenant cA égal au diamêtre, & du point A menant des tangentes jusqu'à la rencontre de la tangente gnf, l'on aura le triangle cherché. Ce triangle est équilatéral, & chacun de ses côtés est $= 2a\sqrt{3}$. En effet, les triangles rectangles semblables Abc, Ang donnent Ab : Ac :: An : Ag; ou en quarrant & mettant les valeurs algébriques $3aa$ (*) : $4aa$ :: $9aa$: $(\text{A}g)^2 = 12.aa = 4aa \times 3$; donc A$g$ = Af $= 2a\sqrt{3}$. Mais $(ng)^2 = (\text{A}g)^2 - (\text{A}n)^2 = 12aa - 9aa = 3aa$; donc $ng = a\sqrt{3}$ & $gf = 2a\sqrt{3}$.

(*) Le triangle rectangle Abc donne $(\text{A}b)^2 = (\text{A}c)^2 - (bc)^2 = 4aa - aa = 3aa$.

REMARQUE. Dans le dernier problême, on a trouvé que le côté du plus grand triangle qu'on puisse inscrire dans un cercle dont le rayon est $= a$, étoit $= a\sqrt{3}$; donc le côté du plus grand triangle qu'on peut inscrire dans un cercle, n'est que la moitié du côté du plus petit triangle qu'on peut circonscrire au même cercle; & partant ces triangles sont entr'eux comme 1 : 4.

On peut quelquefois résoudre facilement les problêmes de *maximis* & *minimis* sans le secours du calcul différentiel.

78. PROBLÊME. *Dans un quadrilatère abfc (fig. 54) trouver un point i tel que la somme des lignes tirées de ce point aux quatre angles soit un minimum.* Le point d'intersection des deux diagonales résout le problême; car la somme $ma + mc$ des lignes tirées aux angles a & c d'un autre point quelconque m, est plus grande que ca, de même $(mb + mf) > bf$; donc &c.

79. PROBLÊME. *Trouver la plus grande surface que deux droites AM, AB données avec une indéterminée* MB *peuvent renfermer (fig. 55).* Il est visible que le triangle MAB sera le plus grand, lorsque l'angle A sera droit; car il aura plus de hauteur que tout autre triangle abm de même base qui auroit les côtés am, ab égaux respectivement aux côtés AM & AB.

80. PROBLÊME. *Trouver la plus grande surface qui puisse être contenue entre quatre lignes données & une indéterminée (fig. 56).* Je dis que si les droites AB, BC, CP, PD données sont inscrites dans un demi-cercle, dont le diamètre AD soit l'indéterminé, elles contiendront la plus grande surface possible; car on vient de prouver que la surface que deux lignes données avec une indéterminée peuvent

contenir, eſt la plus grande, lorſque les lignes données ſont un angle droit; ainſi à moins que les angles ABD, ACD ſoient droits, ces triangles pourront être augmentés ſans augmenter ni diminuer le reſte de la figure. En effet, ſi l'angle ACD n'étoit pas droit, on pourroit augmenter le triangle ACD, en rendant droit l'angle ACD; ce qu'on pourroit faire, en faiſant tourner le triangle BCA autour du point C; car ni ce triangle ni la ſurface CPD ne ſeroient par là diminués.

COROLLAIRE I. On démontreroit par un raiſonnement ſemblable que la même choſe a lieu, quelque nombre de lignes données A*b*, *bc*, *cf*, *fg*, *g*B (fig. 57) qu'on eût; de ſorte que la ſurface renfermée par cinq droites données & une ſixiéme droite indéterminée, ſera la plus grande poſſible, lorſque les droites ſeront inſcrites dans un demi-cercle, dont l'indéterminée ſera le diamêtre. D'où il ſuit que l'eſpace *abfg*, qui eſt une des parties de la ſurface dont on vient de parler, ſera la plus grande poſſible, lorſque les droites qui la renferment ſeront des cordes d'un cercle; autrement la ſurface A*b c f g* B pourroit être augmentée, puiſqu'une de ſes parties pourroit être augmentée, le reſte de la figure reſtant le même.

COROLLAIRE II. Il ſuit du corollaire précédent que le plus grand eſpace que puiſſe renfermer un nombre quelconque des lignes données, eſt une figure inſcrite dans un cercle; de ſorte que ſi ces lignes ſont en nombre infini & infiniment petites, chacune pourra être inſcrite & regardée comme un arc infiniment petit, & leur ſomme comme la circonférence d'un cercle; c'eſt pourquoi le cercle eſt la plus grande des figures *iſopérimêtres* ou de même périmêtre.

Parlons maintenant des *maxima* & des *minima* des fonctions algébriques. Lorsque la fonction algébrique ne renferme qu'une variable x, on peut la supposer égale à y, & différencier ensuite comme si l'on cherchoit la plus grande ou la moindre ordonnée d'une courbe.

81. PROBLÊME. *Trouver les cas dans lesquels la fonction* $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$ *devient un* maximum *ou un* minimum. Supposant cette quantité $= y$, différenciant & faisant $dy = 0$, l'on a $4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = dy = 0$, ou $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, dont les diviseurs sont $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$; donc les valeurs de x sont $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. Si à la place de $x = 1$ l'on substitue $1 + dx$ & ensuite $1 - dx$, on trouvera dans l'un & dans l'autre cas une valeur plus grande pour y qu'en substituant 1. Donc la premiere valeur de x indique un *minimum*; on trouvera que la seconde indique un *maximum* & la troisiéme un *minimum*.

On peut voir dans cet exemple que les *maxima* & les *minima* se succedent alternativement. En général si la courbe bm (fig. 58) a plusieurs *maxima* & *minima* ab, an &c. de maniere qu'à l'abscisse Aa réponde un *minimum* ab, il est visible que l'ordonnée ap ne peut devenir un *minimum*, à moins que la partie bnp ne se soit écartée de l'axe d'une quantité plus grande que l'ordonnée ab, qui est le premier *minimum*; donc il doit y avoir un *maximum* an entre les deux *minimum*. Il est donc aisé de voir qu'un *minimum* ap ne peut être suivi d'un *minimum*, mais il peut être suivi d'un *maximum*. Si à l'abscisse A$a = x$ répond un *maximum* ab (fig. 59), ce *maximum* ne peut être suivi que d'un *minimum*, & celui-ci ne peut être suivi que d'un *maximum*; de

maniere que les *maxima* & les *minima* (quand il y en a plusieurs) se suivent alternativement. On peut aussi appliquer la méthode des *maximis* & *minimis*, quoique l'expression qu'on suppose $= y$ contienne des quantités transcendentes.

82. PROBLÈME. *Quel est le nombre qui, divisé par son logarithme, donne un* minimum *pour quotient?* Soit x le nombre cherché, $\frac{x}{L.x}$ sera un *minimum* & $\frac{L.x}{x}$ un *maximum*. Ainsi en faisant $\frac{L.x}{x} = y$, l'on aura $\frac{dx}{xx} - \frac{dx L.x}{xx} = dy$, & supposant $dy = 0$, l'on a $\frac{1}{xx} - \frac{L.x}{xx} = 0$, $1 = L.x$; & parce qu'il s'agit ici des logarithmes hyperboliques, si l'on fait $= e$ le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$ l'on aura $x = e$; donc $\frac{L.e}{e}$ sera un *maximum*, & $\frac{e}{L.e}$ un *minimum*.

83. PROBLÈME *Trouver un nombre tel que $(x)^{\frac{1}{x}}$ soit un* maximum. Soit $(x)^{\frac{1}{x}} = y = x^z$, en faisant $\frac{1}{x} = z$; donc $L.y = z L.x$, $\frac{dy}{y} = dz. L.x + z. \frac{dx}{x} = \frac{-dx L.x}{xx} + \frac{dx}{xx}$ (en substituant $\frac{-dx}{xx}$ à la place de dz; car la différentielle de $\frac{1}{x} = \frac{-dx}{x^2}$); ainsi en faisant $dy = 0$, divisant par dx & transposant, l'on a $\frac{1}{xx} = \frac{L.x}{xx}$, $L.x = 1$, ou $L.e = 1$, ou $x = e$; donc $(e)^{\frac{1}{e}}$ est un *maximum*. Si on suppose $x = 1$, l'on a $x^{\frac{1}{x}} = (1)^{\frac{1}{1}} = 1.000000$. Si l'on suppose $x = 2$, l'on a $(x)^{\frac{1}{2}} = (2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1.414213$. Si $x = 3$, l'on a $(3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3} = 1.442250$. Si $x = 4$,

l'on a $(x)^{\frac{1}{x}} = 1.414213$ (*); ce qui fait voir que $(e)^{\frac{1}{e}}$ est un *maximum* & non un *minimum*. Ainsi dans la courbe dont l'équation seroit $y = x^{\frac{1}{x}}$, l'ordonnée correspondante à l'abscisse $x = e$ seroit un *maximum*.

84. PROBLÈME. *Quel est l'arc x dont le sinus est un* maximum? Soit $y = \mathit{sin}.\ x$, l'on aura $dy = dx\ \mathit{cos}.\ x$, & supposant $dy = 0$, il vient $\mathit{cos}.\ x = 0$. Or le cosinus de $90°$ est $= 0$; donc l'arc cherché est de $90°$, & son sinus est égal au rayon que nous supposons $= 1$.

La méthode que nous venons de donner a cet inconvenient, qu'il est pénible de s'assurer dans plusieurs cas de l'existence du *maximum* ou du *minimum*, & de distinguer l'un de l'autre, il ne sera donc pas inutile d'expliquer en peu de mots une autre méthode, qui est celle de M. Euler. Cette méthode suppose que l'on regarde les quantités négatives comme plus petites que 0; de sorte que selon cet Auteur, la quantité -2 est plus petite que -1, & plus grande que -3.

Ainsi quand on parlera d'un *maximum* négatif -5, par exemple cela doit s'entendre de maniere que -5 soit une quantité plus grande que $-5\frac{1}{2}$ par exemple, & plus petite que $-4\frac{3}{4}$. S'il s'agit d'une fraction $\frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q}$; en supposant $dy = 0$, l'on aura $P = 0$; de sorte que si $P = xx - aa$, il viendra $x^2 - aa = 0$, $x^2 = aa$, $x = a$, & $x = -a$. Les valeurs de x, qui peuvent donner le *maximum* ou le *minimum*, dépendront donc de l'équation $P = 0$; mais si $Q = 0$, la fraction $\frac{P}{Q}$ peut devenir infinie. Dans ce

(*) Les trois dernieres valeurs de x ne sont qu'approchées.

cas

cas, on pourra égaler Q à o, & voir, en suivant notre méthode, si les valeurs de x qui en résulteront donnent un *maximum* ou un *minimum*, ou si elles ne donnent ni l'un ni l'autre.

Mais dans le systême de M. Euler, la fraction $\frac{P}{Q}$ ne peut devenir un *maximum* qu'en supposant que dans le même cas $\frac{Q}{P}$ devienne un *minimum* $=$ o. Or en donnant à Q une valeur négative, cette derniere fraction devient une quantité négative, qui, selon lui, est plus petite que o; donc cette fraction n'est pas (en admettant les principes de cet Auteur) un *minimum* dans la supposition de Q $=$ o; & par conséquent $\frac{P}{Q}$ n'est pas un *maximum* dans le même cas. D'ailleurs ne s'ensuivroit-il pas de-là que la fraction $\frac{P}{Q}$ doit être plus qu'infinie lorsque Q est négatif; puisque dans le même cas $\frac{Q}{P}$ sera une quantité plus qu'infiniment petite? Or il paroît absurde d'admettre un tel principe (*); car alors, en divisant 6 successivement par les termes 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3 de la progression arithmétique 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, & considérant o comme une quantité infiniment petite, l'on auroit les quotiens 2, 3, 6, ∞, -6, -3, -2. Or -6 résulte de $\frac{6}{-1}$, & si l'on prétend que -1 est plus petit que o, le quotient de 6 par -1

(*) Voyez dans notre Algébre dans quel sens on peut dire qu'une quantité négative est plus petite que o.

sera plus grand que celui de 6 par o (on peut considérer o comme une quantité infiniment petite) ou sera $> \infty$; donc l'on auroit $-6 > \infty$: ce que l'on ne sauroit admettre. Ce que l'on vient de dire peut mettre nos Lecteurs en état de profiter de ce qu'il y a d'utile dans la méthode de M. Euler, que nous allons développer. Mais auparavant, nous devons établir les principes sur lesquels elle est fondée.

Soit y une fonction quelconque de x, qui, en écrivant $x+dx$ au lieu de x, devienne $y+dy$; si dans la valeur de $y+dy$, on écrit encore $x+dx$ à la place de x, y deviendra $y+dy$, dy devenant ddy, & la fonction y deviendra $y+2dy+ddy$; si on substitue encore $x+dx$ au lieu de x, y deviendra $y+dy$, $2dy$ deviendra $2ddy$, & ddy deviendra $dddy$. Or cela revient au même, que si on eût d'abord substitué $x+3dx$ au lieu de x, ou si l'on eût différencié trois fois, en supposant dx constant & conservant tous les termes. Supposons $y=x^3$, l'on aura d'abord $y+dy=(x+dx)^3$ $=x^3+3x^2dx+3xdx^2+dx^3$. Substituant encore $x+dx$ au lieu de x, l'on a $y+dy+dy+ddy$, ou $y+2ydy+ddy=(x+2dx)^3$ $=(x+dx)^3+3(x+dx)^2dx+3(x+dx)dx^2+dx^3$, en supposant dx constant, & ainsi de suite; de sorte que les valeurs qui répondent aux augmentations de x, sont telles qu'on les voit ici.

x	y
$x+dx$	$y+dy$
$x+2dx$	$y+2dy+ddy$
$x+3dx$	$y+3dy+3ddy+dddy$
$x+4dx$	$y+4dy+6ddy+4dddy+ddddy$
&c.	&c.

Il est aisé de voir que les co-efficiens des termes qui renferment quelques fonctions de y, sont les

mêmes que les coefficiens du binome de Newton :
par exemple, les coefficiens des termes de la quantité qui répond à $x + 3dx$ sont 1, $+3$, $+3$, $+1$. En général à $x + mdx$ répond la quantité $y + mdy + \frac{m.(m-1).ddy}{1.2.} + \frac{m.(m-1).(m-2)d^3y}{1.2.3}$ + &c. Si on suppose que m représente un nombre infiniment grand, comme le produit d'une quantité infinie par une quantité infiniment petite dy peut être fini, mdy pourra représenter dans ce cas une quantité finie ; & parce qu'alors la quantité $m - 1$ est censée $= m$, le troisiéme terme sera $\frac{m.\,m\,ddy}{2}$, dans lequel il y a deux facteurs m, m infiniment grands ; & quoique le facteur ddy soit infiniment plus petit que dy, cependant ce terme pourra être fini. Le troisiéme terme sera dans ce cas $= \frac{m^3\,d^3y}{6}$, qui sera fini, quoique d^3y soit infiniment petit du troisiéme ordre, & ainsi de suite. Donc dans ce cas, en appellant p ce que devient la fonction y de x lorsque x se change en $x + mdx$, l'on aura l'équation $p = y + \frac{m\,dy}{1} + \frac{m^2\,ddy}{1.2} + \frac{m^3\,d^3y}{1.2.3} + \frac{m^4\,d^4y}{1.2.3.4}$ + &c.... (A). Maintenant si on fait $mdx = f$ quantité finie, en supposant m un nombre infiniment grand, l'on aura $m = \frac{f}{dx}$, quantité infiniment grande à cause du diviseur infiniment petit. Substituant cette valeur de m dans la formule A, l'on aura l'équation p

$= y + \frac{f\,dy}{dx} + \frac{f^2\,ddy}{1.2.dx^2} + \frac{f^3\,d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{f^4\,d^4y}{1.2.3.4.dx^4}$ &c. Si f étoit une quantité négative, à $x - mdx$ répondroit $p = y - \frac{f\,dy}{1.dx} + \frac{f^2\,d^2y}{1.2.dx^2} - \frac{f^3\,d^3y}{1.2.3.dx^3} +$ &c.

85. Avant de faire l'application de ces formules aux questions des *maximis* & *minimis*, nous ferons remarquer qu'on peut en faire usage pour trouver ce que devient une fonction de x, lorsque x est augmentée d'une quantité finie quelconque. Qu'on demande par exemple la valeur de la fonction $xx - x$, en supposant qu'on substitue $x + 1$ au lieu de x, je fais $y = xx - x$, $f = 1$; prenant les différences, j'ai $\frac{dy}{dx} = 2.x - 1$. Différenciant les deux membres de cette équation en supposant dx constant; il vient $\frac{ddy}{dx} = 2dx$, $\frac{ddy}{dx^2} = 2$. Différenciant les deux membres de cette derniere équation, & faisant attention que la différence de la quantité constante 2 est $= 0$, l'on a $\frac{dddy}{dx^2} = 0$, & par conséquent $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$; ainsi la serie est terminée au troisiéme terme, & l'on a $y + \frac{f\,dy}{dx} + \frac{f^2\,d^2y}{1.2.dx^2} = xx - x + (2x - 1) + \frac{1.2}{2} = xx + x$.

On demande maintenant quelle sera la valeur de $y = xx + 3x + 1$, si l'on substitue $x - 3$

au lieu de x. Je fais $-3=-f$; & en différenciant, je trouve $\frac{dy}{dx}=2x+3$, $\frac{d^2y}{dx^2}=2$. C'est pourquoi l'opération finit ici, parce que la différentielle de 2 est $=0$; donc $y-\frac{fdy}{dx}+\frac{f^2ddy}{1.2.dx^2}=x^2+3x+1-3.(2x+3)+\frac{9.2}{2}=xx-3x+1$.

REMARQUE. Si y est supposé $=x^3$, l'on aura $\frac{dy}{dx}=3x^2$, $\frac{ddy}{dx^2}=6x$, $\frac{d^3y}{dx^3}=6$: & par conséquent $\frac{d^4y}{dx^4}=0$. De sorte qu'en général pour parvenir au terme constant dont la différentielle doit être $=0$, il ne faut faire qu'autant de différenciations qu'il y a d'unités dans l'exposant de x, en supposant qu'il n'y a qu'un terme dans la fonction de x; s'il y a plusieurs termes, comme si on avoit, par exemple, $y=x^{10}+5x^3+2$, l'on ne sera obligé de faire que dix différenciations, c'est-à-dire, autant qu'il y a d'unités dans le plus grand exposant de x.

Faisons maintenant l'application de nos formules aux *fonctions uniformes* de x; c'est-à-dire, aux fonctions qui, pour chaque valeur différente de x, reçoivent une valeur différente. Mais les *fonctions multiformes* de x reçoivent deux ou plusieurs valeurs différentes pour chaque valeur de x: telle est par exemple la quantité $y=\pm\sqrt{(a+x^3+2x^4+\sqrt[3]{x})}$.

Selon ce que nous avons dit ci-dessus, si à la

place de x l'on substitue $x+f$ & ensuite $x-f$, y deviendra

$$y+\frac{f\,dy}{dx}+\frac{f^2\,d^2y}{1.2.dx^2}+\frac{f^3\,d^3y}{1.2.3.dx^3}+\&c. \text{ (B).}$$

$$y-\frac{f\,dy}{dx}+\frac{f^2\,d^2y}{1.2.dx^2}-\frac{f^3\,d^3y}{1.2.3.dx^3}\ \&c. \text{ (R).}$$

Il est nécessaire que dans le cas du *maximum*, l'on ait $y>y+\frac{f\,dy}{dy}+\frac{f^2\,d^2y}{1.2.dx^2}$ &c., &

$$y>y-\frac{f\,dy}{dx}+\frac{f^2\,d^2y}{1.2.dx^2}\ \&c.$$

Mais dans le cas du *minimum*, l'on doit avoir

$$y<y+\frac{f\,dy}{dx}+\&c., \ \&$$

$$y<y-\frac{f\,dy}{dx}+\&c.$$

cela doit arriver, en supposant que f représente une quantité fort petite, puisque, selon ce qu'on a dit ci-dessus, en augmentant ou en diminuant x d'une très-petite quantité, y doit devenir plus petit dans le cas du *maximum* & plus grand dans le cas du *minimum*. Supposons f si petite qu'on puisse négliger ses puissances supérieures, dans ce cas tous les termes qui suivent $\frac{f\,dy}{dx}$ disparoîtront ; & parce que dans le cas du *maximum* ou du *minimum* on a $dy=0$, l'on aura $\frac{f\,dy}{dx}=0$ & $\frac{dy}{dx}=0$ (*). Mais la valeur de y, que cette

(*) Dans notre méthode, on peut aussi supposer $\frac{dy}{dx}=\infty$

équation peut faire trouver, n'est pas toujours un *maximum* ou un *minimum*, comme on l'a vu ci-dessus. Soit c la valeur ou une des valeurs de x que donne l'équation $\frac{dy}{dx} = 0$; qu'on substitue cette valeur dans les valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, &c. & que par cette substitution l'on ait $\frac{ddy}{dx^2} = p$, $\frac{d^3y}{dx^3} = q$, $\frac{d^4y}{dx^4} = r$, $\frac{d^5y}{dx^5} = s$, &c. Supposons encore que la quantité y devienne $= F$, en substituant c à la place de x; si à la place de x on substitue $c + f$ (*) & ensuite $c - f$, les formules ci-dessus B & R deviendront

$$F + \frac{f^2 p}{1.2} + \frac{1}{6} f^3 q + \frac{1}{24} f^4 r + \&c.$$

$$F + \frac{1}{2} f^2 p - \frac{1}{6} f^3 q + \frac{1}{24} f^4 r - \&c.$$

(en faisant attention que le second terme des formules citées, est supposé $= 0$, à cause de $\frac{dy}{dx} = 0$).

Il suit de-là que si p est une quantité positive, l'une & l'autre valeur de y sera plus grande que F, & qu'ainsi la valeur qu'on trouve pour y, en supposant $x = c$, sera un *minimum*. Si p est une quantité négative, l'une & l'autre valeur sera plus petite que F, & y sera un *maximum*. Si dans la supposition de $x = c$, p est $= 0$, on doit alors examiner si $q = 0$. Si cela n'arrive pas, la valeur

(*) f est supposée ici une quantité très-petite.

de y ne sera ni un *maximum* ni un *minimum*; car en supposant $x = c + f$, l'on aura $F + \frac{1}{6} f^3 q > F$; & supposant $x = c - f$, l'on a $F - \frac{1}{6} f^3 q < F$. Mais si $q = 0$, on examinera si r est une quantité positive ou négative : dans le premier cas y sera un *minimum* & un *maximum* dans le second cas. Si $r = 0$, on aura recours à s. Si s n'est pas $= 0$, la fonction y ne sera ni un *maximum* ni un *minimum*. Si $s = 0$, on examinera si t est positif ou négatif. Dans le premier cas y sera un *minimum*, & dans le second cas un *maximum*.

En général, si la différentielle $\frac{d^m y}{dx^m}$ (m étant un nombre impair) ne s'évanouit pas, l'on n'a ni *maximum* ni *minimum*. Si la derniere différentielle $\frac{d m y}{d x^m}$, qui ne s'évanouit pas, est d'un ordre pair, ou si m est un nombre pair, l'on a un *minimum* si cette quantité est positive, & un *maximum*, si elle est négative. Or il faut faire le même examen pour chaque valeur de x, que donne l'équation $\frac{dy}{dx} = 0$. Si l'équation $\frac{dy}{dx} = 0$ a deux racines égales de maniére qu'elle ait un facteur quarré $(x - c)^2 = 0$, alors en supposant $x = c$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ s'évanouira, parce que cette quantité renferme nécessairement la quantité $x - c$, qui devient dans ce cas $c - c = 0$; donc alors on a $p = 0$, mais non pas $q = 0$. Si l'équation $\frac{dy}{dx} = 0$ a trois racines égales ou si $\frac{dy}{dx}$ a un facteur cube $(x - c)^3$, alors en substituant c à la place de x, l'on aura

$\frac{ddy}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$; mais $\frac{d^4y}{dx^4}$ ne fera pas $= 0$. Dans ce cas, l'on aura un *minimum* ou un *maximum*, selon que cette quantité sera positive ou négative. En général, si $\frac{dy}{dx}$ a un facteur $(x - c)^n$, l'on aura un *minimum* ou un *maximum*, si n est un nombre impair; mais on n'aura ni l'un ni l'autre, si n est un nombre pair.

86. PROBLÊME. *Déterminer les cas dans lesquels* $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ *devient un* maximum *ou un* minimum. Supposant cette quantité $= y$, l'on aura $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 20x^3 + 15xx$. Supposant $\frac{dy}{dx} = 0$, il vient $5x^4 - 20x^3 + 15xx = 0$, ou $x^4 - 4x^3 + 3xx = 0$. Cette équation étant divisible par $xx = 0$, donne $x = 0$ & $x = 0$, & de plus $x^2 - 4x + 3 = 0$ ou $(x - 1) \times (x - 3) = 0$ ou $x = 1$ & $x = 3$. Parce que la premiere & la seconde racines sont égales, elles ne donneront ni *maximum* ni *minimum*; car l'équation $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 20x^3 + 15xx$, donne $\frac{ddy}{dx^2} = 20x^3 - 60x^2 + 30x$ (A), qui devient $= 0$, dans la supposition de $x = 0$; Ainsi $\frac{ddy}{dx^2}$ s'évanouit dans ce cas. Mais l'on a $\frac{d^3y}{dx^3} = 60x^2 - 120x + 30$, qui, dans la supposition de $x = 0$, ne s'évanouit pas; ainsi, dans cette supposition, q n'est pas $= 0$; donc les racines égales $x = 0$, $x = 0$, ne donnent ni

maximum ni *minimum*. La troisiéme racine $x = 1$ donne (en substituant 1 au lieu de x, dans l'équation A) $\frac{ddy}{dx^2} = 20 - 60 + 30 = -10$. Donc p est dans ce cas une quantité négative, & y un *maximum*. La quatriéme racine donne $x = 3$. Substituant cette valeur de x dans l'équation A, il vient $\frac{ddy}{dx^2} = 90$; donc dans ce cas (p étant une quantité positive) y est un *minimum*.

87. PROBLÊME. *Dans quels cas* $y = 10x^6 - 12x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 20$ *devient* maximum *ou* minimum? L'on aura $\frac{dy}{dx} = 60x^5 - 60x^4 + 60x^3 - 60xx$, $\frac{ddy}{60.\,dx^2} = 5x^4 - 4x + 3xx - 2x$ (P). Supposant $\frac{dy}{dx} = 0 = 60 \times (x^5 - x^4 + x^3 - xx)$, il vient 0. Divisant cette derniere équation par 60 & résolvant le second membre en facteurs, l'on a $xx(x - 1) \times (xx + 1) = 0$. Le facteur xx donne deux racines égales à 0; donc pour le cas de $x = 0$, il n'y a ni *maximum* ni *minimum*. Le second facteur donne $x = 1$. Substituant cette valeur de x dans l'équation P, il vient $\frac{ddy}{60.\,dx^2} = 2$, ou $\frac{ddy}{dx^2} = 120$; donc p est une quantité positive, & en substituant 1 à la place de x, y sera un *minimum*. Le facteur $xx+1$ donne $xx = -1$ & $x = \pm\sqrt{-1}$; donc les deux racines de ce facteur sont imaginaires, & dans ce cas il n'y a ni *maximum* ni *minimum*.

En général, on voit que si l'équation est du

degré n, la détermination des *maxima* & *minima* dépend de l'équation $\frac{dy}{dx} = 0$, qui est du degré $n - 1$. De sorte que si l'on a $y = x^n + Bx^{n-1} +$ &c. l'on aura l'équation $\frac{dy}{dx} = n x^{n-1} + B.(n-1) x^{n-2}$ &c. $= 0$. Si a, b, c, g, &c. sont les racines de l'équation $\frac{dy}{dx} = 0$, de maniere que l'on ait a plus grand que b, b plus grand que c, & ainsi de suite, la substitution de a à la place de x donnera un *minimum*, b donnera un *maximum*, & ainsi de suite alternativement. Car, en supposant $x = \infty$, l'on aura y infini; & puisque les valeurs de x entre ∞ & a ne produisent ni *maximum* ni *minimum*, il est visible que y décroît, tandis qu'au lieu de x, on substitue des valeurs depuis ∞, jusques à a; donc la racine a produit un *minimum*. En faisant x plus petit que a, y doit croître jusqu'à ce que $x = b$, & alors y sera un *maximum*. Mais y redeviendra *minimum* lorsqu'on aura $x = c$, & ainsi de suite; de sorte que les *maxima* & les *minima* se succedent alternativement. Si l'équation $\frac{dy}{dx} = 0$ a deux racines égales, elles ne donneront ni *maximum* ni *minimum*. Il en sera de même pour un nombre pair quelconque des racines égales; mais s'il y a trois racines inégales, on les considérera comme une seule racine qui donnera un *maximum* ou un *minimum*. En général, un nombre impair quelconque de racines égales ne donnera qu'un seul *maximum* ou *minimum*.

S'il s'agit des fonctions fractionaires rationelles, de maniere que l'on ait $y = \frac{P}{Q}$, P & Q étant des fonc-

tions rationelles de x, l'on aura $dy = \frac{QdP - PdQ}{QQ}$ & $\frac{dy}{dx} = \frac{QdP - PdQ}{QQdx}$. Dans notre méthode, on pourroit supposer souvent $\frac{dy}{dx} = \infty$, & alors on auroit $QQdx = 0$ ou $Q = 0$, & l'on examineroit si les racines de cette équation donnent un *maximum* ou un *minimum*. Mais dans la méthode de M. Euler, on supposera toujours $dy = 0$ & $QdP - PdQ = 0$, & les racines de cette équation rendront y un *maximum* ou un *minimum*.

88. PROBLÊME. *Dans quels cas* $y = \frac{x}{1 + xx}$ (*) *devient un* maximum *ou un* minimum? L'on aura $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - xx}{(1 + xx)^2}$ (A), $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-6x + 2x^3}{(1 + xx)^3}$ (B). Supposant le numérateur de la fraction A égal à 0, il vient $1 - xx = 0$, $1 = xx$, $x = \pm\sqrt{1}$; donc $x = 1$ & $x = -1$. La premiere valeur de x étant substituée dans l'équation B, donne $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}$; donc dans ce cas $y = \frac{1}{2}$ est un *maximum*. La seconde valeur de $x = -1$ donne $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{4}{8}$; donc, dans ce cas, $y = -\frac{1}{2}$ est un *minimum*.

(*) Si on suppose que y est l'ordonnée d'une courbe dans laquelle 1 désigne une ligne qu'on regarde comme l'unité, on aura les *maxima* ou les *minima* d'ordonnées.

REMLAQUE. Lorſque y devient un *maximum*; $\frac{1}{y}$ doit devenir un *minimum*, & réciproquement, lorſque y eſt un *minimum*, $\frac{1}{y}$ eſt un *maximum.*

89. PROBLÊME. *Dans quels cas* $y = \frac{2-3x+xx}{2+3x+xx}$ *devient un* maximum *ou un* minimum? L'on a $\frac{dy}{dx} = \frac{6xx-12}{(2+3x+xx)^2}$ (A). $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-12x^3+72x+72}{(2+3x+xx)^3}$ (B). Si on ſuppoſe $\frac{dy}{dx} = 0$, l'équation A donne $6xx - 12 = 0$, $6xx = 12$, $xx = 2$; $x = \pm\sqrt{2}$, ou $x = +\sqrt{2}$, & $x = -\sqrt{2}$. Subſtituant la premiere valeur de x dans l'équation B, il vient $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{48\sqrt{2}+72}{(3\sqrt{2}+4)^3}$, quantité poſitive; donc cette valeur de x rend y *minimum.* La ſeconde valeur de x donne $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-48\sqrt{2}+72}{(-3\sqrt{2}+4)^3} = \frac{24(3-2\sqrt{2})}{(4-3\sqrt{2})^3}$ quantité négative, parce que le dénominateur eſt négatif & le numérateur eſt poſitif; car $3\sqrt{2} > 4$.

Si onſuppoſe $x = \frac{4}{3}$ (*), l'on a $y = -\frac{2}{70} = -0.0285$.

Si $x = \sqrt{2}$ l'on a $y = 12\sqrt{2} - 17 = -0.0294$ *minimum.*

Si $x = \frac{3}{2}$ l'on a $y = \frac{-1}{35} = -0.0285$.

Si $x = -\frac{4}{3}$, l'on a $y = -35$.

Si $x = -\sqrt{2}$, l'on a $y = -33.971$ *maximum.*

Si $x = -\frac{3}{2}$, l'on a $y = -35$.

(*) Les valeurs des radicaux ne ſont qu'approchées.

Car pour le *minimum*, l'on a $y = \frac{4-3\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}$ $= 12\sqrt{2} - 17$, & pour le *maximum*, l'on a $y = \frac{4+3\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}} = -12\sqrt{2} - 17$, & supposant pour les valeurs de $\sqrt{2}$, $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{2}$, l'on aura les valeurs de y, qu'on vient de supposer.

L'on peut remarquer ici que la valeur du *maximum* est plus petite que celle du *minimum*; mais cela n'aura pas lieu, en considérant les quantités négatives comme si elles étoient positives.

REMARQUE I. Si l'on avoit $y = x^{\frac{2}{3}}$, l'on auroit $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$ & les différentielles $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ &c. ne deviendroient jamais égales à 0. De plus, l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = 0$, est impossible, à moins qu'on ne suppose $x = \infty$; car 2 n'est pas $= 0$. Dans ce cas, si on suppose $x = 0$, les termes $\frac{f\,dy}{dx}$, $\frac{f^2\,ddy}{dx^2}$, &c. deviennent infinis, & la serie est divergente. Dans ce même cas, on peut chercher le *maximum* ou le *minimum* de x^2; car toutes les fois que x^2 deviendra un *maximum* ou un *minimum*, $x^{\frac{2}{3}}$ deviendra aussi un *maximum* ou un *minimum*. De même, si on a $x^{\frac{4}{3}} = y$, on pourra chercher le *maximum* de x^4 & les valeurs de x, qui rendront x^4 *maximum* ou *minimum*, rendront aussi y *maximum* ou *minimum*, &c. De même $(xx - 3x + 2)^{\frac{2}{3}}$ deviendra un *maximum*

ou un *minimum*, dans le même cas que $(xx-3x+2)^2$. De même $(x^2-5x+3)^{\frac{m}{n}}$, m étant un nombre pair & n un nombre impair, deviendra un *maximum* ou *minimum*, dans le même cas que $(xx-5x+3)^m$. Il suffit donc de pouvoir trouver les *maxima* & les *minima*, lorsque l'exposant de la fonction de x est un nombre pair.

REMARQUE II. Si y est un *maximum* ou un *minimum* positif, $\sqrt{y}$ sera aussi un *maximum* ou un *minimum* ; mais si y est un *maximum* ou un *minimum* négatif, $\sqrt{y}$ sera imaginaire.

Si y est un *minimum* négatif, y^2 sera un *maximum*, parce qu'alors les valeurs de y^2 qu'on trouvera en augmentant ou en diminuant x d'une très-petite quantité, seront plus petites que la valeur de y^2, que donne le *minimum* négatif ; mais si y est un *maximum* négatif, y^2 sera un *minimum*.

90. PROBLÈME. *Dans quels cas la fonction* $(xx-3x+7)^{\frac{2}{3}}$ *devient* maximum *ou* minimum?

Je cherche dans quels cas $(xx-3x+7)^2 = y$ devient un *maximum* ou un *minimum*. En différenciant, je trouve $\frac{dy}{dx} = 2.(2x-3) \times (xx-3x+7)$ (A), $\frac{ddy}{dx^2} = 4.(xx-3x+7) + 4.(2x-3).(2x-3)$.

En supposant les deux membres de l'équation A égaux à $= 0$, l'on a $2x-3=0$, ou $x=\frac{3}{2}$; on a encore $x^2-3x+7=0$, ou $x^2-3x=-7$, ou $x^2-3x+\frac{9}{4}=\frac{9}{4}-7=\frac{9}{4}-\frac{28}{4}=\frac{-19}{4}$, $x-\frac{3}{2}$ $=\pm\sqrt{\left(\frac{-19}{4}\right)}$, ou $x=\frac{3\pm\sqrt{(-19)}}{2}$; d

forte que les deux racines font imaginaires & ne donnent ni *maximum* ni *minimum*. Si on fubftitue la valeur $\frac{3}{2}$ de x que donne le facteur $2x-3=0$, l'on a $\frac{ddy}{dx^2}=+19$; donc la quantité propofée devient un *minimum* dans ce cas.

REMARQUE. On auroit pu fe contenter de chercher dans quel cas x^2-3x+7 devient un *maximum* ou un *minimum*; car on auroit trouvé que la valeur de $x=\frac{3}{2}$ donne un *minimum* pour cette quantité, & par conféquent fon quarré, que je repréfente par y^2 & fa puiffance $y^{\frac{2}{3}}$, doivent auffi être des *minima*; mais fi le *minimum* avoit été négatif, y^2 feroit un *maximum*, auffi bien que $y^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{y^2}$, ce qui eft évident.

91. PROBLÊME. *Dans quels cas* $y=(aa+xx)^{\frac{1}{2}}-x$ *devient* maximum *ou* minimum? L'on aura $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{(aa+xx)}}-1$, équation que je défignerai par (A), $\frac{ddy}{dx^2}=\frac{aa}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}$. Suppofant $\frac{dy}{dx}=0$, l'équation A donne $x=\sqrt{(aa+xx)}$, $x^2=aa+xx$. Selon M. Euler, en fuppofant $x=\pm\infty$, on a $x^2=aa+xx$, & dans ce cas $\frac{ddy}{dx^2}$ eft $=0$. De même $\frac{d^3y}{dx^3}=0$; &c. ce qui vient, fi l'on en croit cet Auteur, de ce qu'on a $x=-\infty$, auffi bien que $x=+\infty$. Mais dans la fuppofition de $x=\infty$, aa difparoiffant devant xx, l'on a $\sqrt{(xx+aa)}-x=0$; ainfi

ainsi y a la plus petite valeur possible, dans la supposition de $x = \infty$. Si l'on ne vouloit pas que aa s'évanouît dans ce cas, l'on auroit $xx + aa = xx$ & $aa = 0$, ce qui est absurde. Donc y n'auroit ni *maximum* ni *minimum*; & de plus, parce qu'on ne peut pas supposer x plus grand que ∞, on ne peut avoir ni *maximum* ni *minimum*, dans le sens que nous avons donné à ces termes.

92. PROBLÊME. *Dans quels cas* $y = \sqrt{(aa + 2bx + mxx)} - nx$ *devient* maximum *ou* minimum? On aura $\frac{dy}{dx} = \frac{b + mx}{\sqrt{(aa + 2bx + mxx)}} - n$; donc en supposant $dy = 0$, l'on a $(b + mx)^2 = n^2(aa + 2bx + mxx)$, d'où l'on tire par les régles ordinaires de l'Algébre, $x =$

$$\frac{(nn - m).b \pm \sqrt{[(mnn).(m - nn)aa - nn.(m - nn).bb]}}{m.(m - nn)},$$

ou $x = -\frac{b}{m} + \frac{n}{m}\sqrt{\left(\frac{maa - bb}{m - nn}\right)}$; donc l'on a $\sqrt{(a^2 + 2bx + mxx)} = \frac{b + mx}{n} = \pm \sqrt{\left(\frac{maa - bb}{m - nn}\right)}$; donc puisque $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{maa - bb}{(aa + 2bx + mxx)^{\frac{3}{2}}}$, l'on aura $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{maa - bb}{\pm\left(\frac{maa - bb}{m - nn}\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Si la quantité $\left(\frac{maa - bb}{m - nn}\right)$ n'est pas positive, sa puissance $\frac{3}{2}$ ou la racine quarrée de son cube sera imaginaire, & l'on n'aura ni *maximum* ni *minimum*. Si cette quantité est positive & $m > nn$, le signe supérieur donnera un *minimum*; mais il donnera un *maximum*, si $m < nn$; parce qu'alors le numérateur $maa - bb$ sera une quantité négative, qui, étant di-

visée par une quantité positive, donne un quotient négatif pour la valeur de $\frac{ddy}{dx^2}$. Le contraire arrivera pour le signe inférieur, c'est-à-dire, pour le signe —. Si on suppose $m=2, n=1$, & $b=0$, y devient un *minimum*, en substituant pour x la quantité $+\frac{1}{2}\sqrt{2aa}=\sqrt{\frac{2aa}{4}}=\sqrt{\frac{4aa}{8}}=\frac{\sqrt{4aa}}{2\sqrt{2}}=\frac{2a}{2\sqrt{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$; mais y devient un *maximum*, en mettant $-\frac{1}{2}\sqrt{aa}=-\frac{a}{\sqrt{2}}$ à la place de x; donc le *minimum* sera $=a\sqrt{2}-\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$, & le *maximum* sera $=a\sqrt{2}+\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{3a}{\sqrt{2}}$.

Lorsqu'on a une équation qui renferme x & y mêlés ensemble, on doit différencier l'équation & supposer le co-efficient de dx (que nous désignerons par P) $=0$, & par ce moyen on trouvera une valeur de y, qui étant substituée dans l'équation, pourra faire connoître les valeurs de x, qui rendent y *maximum* ou *minimum*. Soit $y^3-3axy+x^3=0$; donc $3yydy-3aydx-3axdy+3xxdx=0$. Egalant P à o, il vient $3xx-3ay=0$, $xx=ay$, $y=\frac{xx}{a}$; substituant cette valeur de y dans l'équation proposée, l'on a $\frac{x^6}{a^3}-3x^3+x^3=0$, ou $\frac{x^6}{a^3}-2x^3=0$, ou $x^6=2a^3x^3$, ou $x^3=2a^3$; & partant $x=a\sqrt[3]{2}$. Maintenant soit

$= Q$ le multiplicateur de dy, l'on aura $P\,dx + Q\,dy = 0$; différenciant P & Q, il vient $dP = R\,dx + S\,dy$ (*) & $dQ = T\,dx + V\,dy$. Donc $d.(P\,dx + Q\,dy)$, en regardant dx comme constant, sera $= R\,dx^2 + S\,dx\,dy + T\,dx\,dy + V\,dy^2 + Q\,ddy = 0$; & parce que l'on suppose $\frac{dy}{dx} = 0$, en divisant l'équation par dx^2 & effaçant les termes qui contiennent dy ou dy^2, il vient $R + \frac{Q\,ddy}{dx^2} = 0$, ou $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-R}{Q}$; donc dans l'équation différentielle $P\,dx + Q\,dy = 0$, il suffit de différencier P en supposant dy constant, pour avoir $R\,dx$. On cherchera ensuite la valeur de $\frac{R}{Q}$, qui indiquera un *maximum* ou un *minimum*, selon qu'elle sera positive ou négative; car si elle est négative, $\frac{-R}{Q} = \frac{ddy}{x^2}$ sera positif. Dans le cas proposé l'on a $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - xx}{yy - ax} = 0$; donc $ay - xx = 0$; donc (en différenciant & faisant attention que $ay - xx = 0$), l'on aura $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2x}{yy - ax}$. Mais l'équation $ay - xx = 0$, donnant $y = \frac{xx}{a} = a\sqrt[3]{4}$, $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-R}{Q}$ sera $= -\frac{2}{a}$, quantité négative qui fait voir que la fonction y est un *maximum*, lorsque l'on a $x = a\sqrt[3]{2}$.

L'équation $x^6 = 2a^3x^3$ donne $x^3 = 0$, ou $x = 0$,

(*) S désigne ici le co-efficient de dy & non une intégrale.

$x = 0$, $x = 0$; & alors $yy - ax = 0$, à cause de $y = \frac{xx}{a}$. Supposons $y = p$ & $x = f$, f étant une quantité très-petite dont la puissance 3e disparoît devant pf, l'on aura $p^3 = 3\,apf$, $p^2 = 3\,af$ & $p = \pm \sqrt{3\,af}$; donc quoique l'on ne puisse pas prendre f négativement, parce que p seroit imaginaire, cependant des deux valeurs de y, l'une sera plus grande & l'autre plus petite que 0. Si l'on fait $p = bf^2$, pour avoir $f^3 = 3ab\,f^3$, $b = \frac{1}{3a}$, & $p = \frac{f^2}{3a}$, quelque signe qu'on donne à f, la valeur de y sera plus grande que 0. Ainsi dans ce cas la valeur de $y = 0$ sera un *minimum*.

Si dans ces sortes de cas l'équation, qui doit donner la valeur de x, a plusieurs racines réelles, on fera pour chacune ce qu'on vient de faire pour la valeur de $x = a\sqrt[3]{2}$, & si l'on trouve $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \frac{P}{Q}$, ce sera une marque que plusieurs branches de la courbe représentée par l'équation se rencontrent au même point. On comprendra cela facilement, si l'on se rappelle ce qu'on a dit ci-dessus par rapport à la fraction $\frac{0}{0}$.

93. Nous allons parler maintenant d'une autre espéce de *maximum* & de *minimum*, qu'on ne peut trouver par la méthode qu'on vient d'expliquer. Supposons qu'on ait l'équation $y = p \pm (c - x)^2 \times \sqrt{(c - x)}.\,q$, p & q étant des fonctions de x non divisibles par $c - x$, & que q ait une valeur positive en substituant c ou une quantité plus grande ou plus petite que c au lieu de x, supposant de plus que x étant $= c$, l'on ait $p = g$;

il est visible que dans le cas de $x = c$ (*), les deux valeurs de y sont toutes les deux égales à g. Si on suppose $x > c$, les deux valeurs de y seront imaginaires; mais en supposant x un peu plus petit que c, ou en supposant $x = c - f$, f étant une quantité positive très-petite, p deviendra $= g - \frac{f\,dp}{dx} + \frac{f^2\,ddp}{2\,dx^2}$ — &c. (**), & q se changera en $q - \frac{f\,dq}{dx} + \frac{f^2\,d^2q}{2\,dx^2}$ — &c. donc à cause de $x = c - f$, ou de $f = c - x$, l'on aura $y = g - \frac{f\,dp}{dx} + \frac{f^2\,ddp}{2\,dx^2}$ &c. $\pm f \sqrt{f} \times (q - \frac{f\,dq}{dx} + \frac{f^2\,d^2q}{2\,dx^2}$ — &c.); & parce que l'on peut supposer f assez petite pour que f^2, f^3 &c. disparoissent devant f, l'on aura $y = g - \frac{f\,dp}{dx} + f \sqrt{f}.\,q$ (A). Ces valeurs seront toutes les deux plus petites que g, si $\frac{dp}{dx}$ est une quantité positive; mais elles seront plus grandes que g, si $\frac{dp}{dx}$ est une quantité négative; donc dans le premier cas y sera un *maximum* & dans le second cas un *minimum*. Mais, comme on le voit, y est alors *maximum* ou *minimum* par rapport aux valeurs antécédentes, & non aux valeurs suivantes qui sont imaginaires.

(*) On suppose c & x positifs.

(**) C'est la formule R'(83) en substituant g pour y, & dp pour dy, &c.

Suppôsons que l'équation d'une courbe soit $y = \frac{x^2}{a} \pm (c - x) . \sqrt{(c - x) . x^2}$, il est visible (fig. 60) qu'en supposant AP $= x = c$, l'on aura $y = \frac{c^2}{a}$ = PM. Mais en supposant $x > c$, y sera imaginaire ; en supposant $x < c$, l'on aura deux ordonnées pm, pn toutes les deux plus petites que PM. De sorte que la courbe a deux branches qui partent de M ; ou, si l'on veut, la courbe mMn, après avoir été jusqu'en M, rebrousse son chemin vers (A), & a une autre branche M n. Le point M s'appelle un *point de rebroussement*.

En général toutes les courbes dont l'équation est $y = p \pm (c - x)^n . \sqrt{(c - x)} . q$, n étant un nombre entier, auront des ordonnées imaginaires correspondantes aux x positifs plus grands que c.

En général si l'on suppose $y = p \pm q . (c - x)^{\frac{2n+1}{2m}}$, $2n + 1$ étant supposé $> 2m$, n & m étant des nombres entiers pairs ou impairs ; parce que $(c - x)^{\frac{2n+1}{2m}}$ est la racine paire d'une quantité négative, lorsque $c < x$, on aura un *maximum*, si $\frac{dp}{dx}$ est positif, & un *minimum*, si $\frac{dp}{dx}$ est négatif. Si $\frac{dp}{dx} = 0$, l'on aura $y = g + \frac{f^2 d^2 p}{2 d x^2} \pm q . f^{\frac{2n+1}{2m}}$; si $\frac{2n+1}{2m}$ n'est pas > 2,

le troisiéme terme ne disparoissant pas devant le second, on n'aura ni *maximum* ni *minimum*. C'est ce qui arrive dans la courbe (fig. 61), dont l'équation est $y = \frac{x^2}{a} \pm x^2 . (c - x)^{\frac{3}{2}}$, parce que $f^{\frac{3}{2}} > f^2$; car alors de deux ordonnées pm, pn, l'une est plus grande & l'autre plus petite que PM. Si $\frac{d^2 p}{dx^2}$ est une quantité positive, en supposant $\frac{2n+1}{2m} > 2$, $y = g$ sera un *minimum*; mais y sera un *maximum*, si $\frac{ddp}{dx^2}$ est une quantité négative. On peut voir facilement comment il faut procéder si $\frac{ddp}{dx^2}$ est $= 0$; les *maxima* & les *minima* ordinaires n'empêchent pas qu'une courbe ait des *maxima* & des *minima* de la seconde espéce.

94. PROBLÊME. *Trouver les* maxima *& les* minima *de la fonction* $y = 2x - xx \pm (1 - x)^2 \times \sqrt{(1 - x)}$. Pour les *maxima* & les *minima* de la seconde espéce, substituant f à la place de $c - x = 1 - x$ (ici $c = 1$), l'on a $y = 1 - f^2 \pm f^2 \sqrt{f}$; quantité plus petite que 1, soit qu'on prenne le signe + ou le signe —. Car nous supposons f très-petite, ce qui fait que $f^2 \sqrt{f}$ disparoît devant f^2; donc il y a un *maximum* de la seconde espéce qui répond à $x = 1$. Si l'on vouloit chercher les *maxima* & les *minima* de la

premiere espéce, on trouveroit $\frac{dy}{dx} = 2 - 2x \mp \frac{5}{2}.(1-x).\sqrt{(1-x)}$. Supposant $\frac{dy}{dx} = 0$, l'on trouve $x = 1$; & parce que $\frac{ddy}{dx^2} = -2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{(1-x)} = -2$, dans la supposition de $x = 1$, il semble qu'on doit avoir un *maximum* de la premiere espéce pour l'ordonnée correspondante à l'abscisse $x = 1$. Cependant si l'on décrit la courbe de l'équation $y = 2x - xx \pm (1-x)^2.\sqrt{(1-x)}$, on verra que les ordonnées correspondantes aux abscisses positives plus grandes que 1 sont imaginaires: ce qui prouve qu'il faut admettre une exception à la régle de M. Euler, que nous venons d'expliquer. Mais par notre méthode, on trouveroit que dans ce cas l'on n'a ni *maximum* ni *minimum* de la premiere espéce. Lorsque l'on aura pour $\frac{ddy}{dx}$ une valeur de cette forme $a \pm b\sqrt[m]{(c-x)}$, a & b étant des quantités positives ou négatives, & m un nombre pair, 2, 4, 6 &c. laquelle valeur deviendra $= a$, dans la supposition de $x = c$, la méthode de M. Euler pourra induire en erreur pour les *maxima* & les *minima* de la premiere espéce, lorsqu'on les cherchera dans la supposition que l'équation $\frac{dy}{dx} = 0$ ait donné $x = c$.

Revenons à l'équation $\frac{dy}{dx} = 0 = 2 - 2x \mp \frac{5}{2}(1-x).\sqrt{(1-x} = 0$. Cette derniere équation étant divisée par $1-x$, l'on a $4 \mp$

$5\sqrt{(1-x)} = 0, 4 = \pm 5\sqrt{(1-x)}$, ou $16 = 25 - 25x$, ou $25x = 9$, & $x = \frac{9}{25}$. Substituant cette valeur de x (*) dans $\frac{ddy}{dx^2} = -2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{(1-x)}$, il vient $\frac{ddy}{dx^2} = -2 \pm 3$. En prenant le signe supérieur (**), on a un *minimum* pour y, qui alors sera $\frac{2869}{3125}$. Si l'on prend le signe inférieur, l'on a $y = \frac{821}{3125}$, qui paroît un *maximum*; mais le seul signe supérieur peut avoir lieu, parce qu'on ne peut avoir $4 \mp 5.\sqrt{(1-x)} = 0$, à moins que $5\sqrt{(1-x)}$ ne soit $= 4$ & $4 - 5\sqrt{(1-x)} = 0 = 4-4$. Le *minimum* de la premiere espéce n'a donc lieu que pour les ordonnées de la seule branche désignée par $y = 2x - x^2 + (1-x) \times \sqrt{(1-x)}$.

95. PROBLÊME. *Trouver les* maxima *& les* minima *de la seconde espéce dans la fonction* $y = x \pm (1-x).\sqrt{(1-x)}$. Supposant $1 - x = c - x = f$, ou $x = 1 - f$, l'on aura $y = 1 - f \pm f\sqrt{f}$ (***) $= 1 - f$; car $f\sqrt{f}$ disparoît à cause qu'on suppose f très-petite. Donc y devient un *maximum* de la seconde espéce, lorsque $x = 1$.

REMARQUE. Si l'équation n'étoit pas sous la

(*) On doit faire attention que cette valeur de x n'est pas $= 1$, qui ici est $= c$.

(**) Pour la valeur de $\frac{ddy}{dx^2}$ & pour la valeur de y dans l'équation proposée.

(***) C'est la valeur de y dans la supposition de $1 - x = f$.

forme $y = p \pm (c - x)^n . \sqrt[m]{(c - x)} . q$, on l'y rameneroit en cherchant la valeur de y en x.

Si l'on avoit une équation telle que $y = p \pm (x - c) . \sqrt{(x - c)} . q$, q étant une constante ou une fonction de x qui soit positive, quelque valeur que l'on donne à x, p étant une fonction de x, on suppose que p & q ne sont pas divisibles par $x - c$; en supposant $x - f = c$, ou en supposant $x = c$, l'on aura $y = p$. Mais y devient imaginaire, si $x < c$, tandis qu'il a deux valeurs réelles, lorsque $x > c$. Cela arrivera toutes les fois que l'on aura une équation de cette forme $y = p \pm (x - c)^n . \sqrt[m]{(x - c)} . q$ (*), m étant un nombre pair & n un nombre entier; ou de celle-ci $y = p \pm q . (x - c)^{\frac{2n+1}{2m}}$, m & n étant des nombres pairs ou impairs, pourvu que $2n + 1 > 2m$. Et si l'on suppose que la fig. 62 représente une de ces sortes de courbes de maniere que $AP = x$ soit $= c$, $PM = y = p$, les ordonnées correspondantes aux abscisses Ap plus grandes que c, seront réelles; mais les ordonnées correspondantes aux abscisses $AB < c$ seront imaginaires. La courbe aura un point M, d'où partiront deux branches qui s'étendront du côté des abscisses positives. Si en supposant les points P & p très-proches, l'on a les ordonnées pn & pm toutes les deux plus grandes ou toutes les deux plus petites que PM, dans le premier cas PM sera un *minimum* & dans le second cas un *maximum*. Nous appellerons cette espéce de *maximum* ou de *minimum* un *maximum* ou un *minimum* de la troisiéme espéce; il differe de celui de la seconde, en ce que dans celui de la

(*) c peut être $= 0$.

troisiéme espéce l'ordonnée y est un *maximum* ou un *minimum* par rapport aux valeurs suivantes, au lieu que dans le *maximum* ou le *minimum* de la seconde espéce, y est *maximum* ou *minimum*, par rapport aux valeurs antécédentes de y; mais si $pn > PM$ & $pm < PM$, l'on n'a ni *maximum* ni *minimum*.

Pour trouver ces sortes de *maximum* & de *minimum*, on supposera qu'en faisant $x = c$, l'on ait $p = g$. Si on suppose x un peu plus grand que c, c'est-à-dire, si on suppose $x - f = c$; (f étant une quantité infiniment petite) ou $x = c + f$, la fonction p se changera en $g + \frac{fdp}{dx} + \frac{f^2 d^2 p}{2.dx^2} +$ &c. & la fonction q deviendra $q + \frac{fdq}{dx} + \frac{f^2 d^2 q}{2.dx^2} +$ &c. Donc dans ce cas on aura $y = g + \frac{fdp}{dx} + \frac{f^2 d^2 p}{2.dx^2} +$ &c. $\pm f^{\frac{2n+1}{2m}}.\left(q + \frac{fdq}{dx} + \text{\&c.}\right)$; & parce que f est supposée infiniment petite, l'on a $y = g + \frac{fdp}{dx} \pm f^{\frac{2n+1}{2m}} q$.

Maintenant si $\frac{dp}{dx}$ est une quantité positive (en supposant $\frac{2n+1}{2m} > 1$), y sera un *minimum*; si $\frac{dp}{dx}$ est une quantité négative, $y = g$ sera un *maximum*; mais si $\frac{2n+1}{2m}$ n'est pas > 1,

on n'aura ni *maximum* ni *minimum*. Si $\frac{dp}{dx}$ $=0$, alors $y = g + \frac{f^2 ddp}{2.dx^2} \pm q.f^{\frac{2n+1}{2m}}$. Si dans ce cas $\frac{2n+1}{2m}$ n'est pas > 2, l'on n'a ni *maximum* ni *minimum*; si $\frac{2n+1}{2m} > 2$, alors $y = g$ sera un *maximum* ou un *minimum*, selon que $\frac{d^2 p}{dx^2}$ sera une quantité négative ou positive. Il n'est point difficile de voir comment on doit procéder lorsque $\frac{ddp}{dx^2} = 0$.

96. PROBLÊME. *Trouver les* maxima ou minima *de la troisième espèce de la fonction* $y = ax \pm (x-1)^{\frac{3}{2}} \times x^2 = ax \pm (x-1) \cdot \sqrt{(x-1)} \cdot xx$. Dans la supposition de $x = 1$, (c est ici $= 1$), l'on a $y = a = g$; mais $p = ax$, $\frac{dp}{dx} = a$, $\frac{2n+1}{2m} = \frac{3}{2} > 1$; donc $y = g$ sera un *minimum*, si a est positif, & un *maximum*, si a est négatif. La figure 62 peut représenter le premier cas, & la figure 63 le second.

Avant de passer plus loin, nous allons parler d'un cas dans lequel les valeurs antécédentes de y sont imaginaires, aussi bien que les conséquentes. Qu'on demande, par exemple, de trouver le *maximum* ou le *minimum* de y, en supposant que l'on a l'équation $y^4 + x^4 = 4xy - 2$. En différenciant, l'on trouve $\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^3}{y^3 - x}$;

Supposant $\frac{dy}{dx} = 0$, l'on a $x^3 = y$. Substituant cette valeur de y dans l'équation proposée, il vient $x^{12} + x^4 = 4x^4 - 2$, ou $x^{12} - 3x^4 + 2 = 0$, cette équation donne les diviseurs $x^4 - 1 = 0$, $x^8 + x^4 - 2 = 0$. Cette derniere équation donne $x^4 - 1 = 0$ & $x^4 + 2 = 0$. La derniere équation a toutes ses racines imaginaires. Les équations $x^4 - 1 = 0$, $x^4 - 1 = 0$ donnent chacune $x^2 = 1$ (*) & $x = \pm 1$; donc on a deux valeurs positives & deux valeurs négatives de x, & chacune de ces valeurs est l'unité; & à cause de $x^3 = y$, l'on a $y^3 - x = 1 - 1 = 0$; donc, selon ce qu'on a dit ci-dessus, l'on doit avoir $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. Pour savoir si dans ce cas il y a un *maximum* ou un *minimum*, soit $x = 1 - f$ & $y = 1 - n$, f & n étant supposées infiniment petites; en substituant ces valeurs dans l'équation donnée, on aura

$$\left.\begin{matrix} 1 - 4n + & 1 - 4f \\ + 6n^2 + & 6f^2 = \\ - 4n^3 - & 4f^3 \\ + n^4 & + f^4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 4 - 4f - 4n - 2 \\ + 4fn, \end{matrix}$$

ou en négligeant les puissances de n & de f au-dessus du second degré, $6n^2 = 4nf - 6f^2$, ou $6n^2 - 4nf = -6f^2$, ou $n^2 - \frac{2}{3}nf = -f^2$, ou $n^2 - \frac{2}{3}nf + \frac{f^2}{9} = \frac{f^2}{9} - f^2 = \frac{f^2 - 9f^2}{9} = -\frac{8}{9}f^2$; donc $n - \frac{1}{3}f = \pm\sqrt{(-\frac{8}{9}f^2)}$, & $n = \frac{f \pm f\sqrt{(-8)}}{3}$,

(*) $x^4 - 1 = 0$ est divisible par $x^2 - 1 = 0$ & donne pour quotient $x^2 + 1 = 0$, dont les racines sont imaginaires.

quantité imaginaire, soit qu'on prenne f positive ou négative, c'est-à-dire, soit qu'on augmente ou qu'on diminue l'abscisse; ainsi le point qui répond à $x = 1$ & à $y = 1$, est un point conjugué, & l'ordonnée y n'est ni un *maximum* ni un *minimum* de la premiere ou de la seconde ou de la troisiéme espéce; car les ordonnées voisines à la droite ou à la gauche sont imaginaires.

97. Lorsque la fonction V dont on veut trouver le *maximum* ou le *minimum* est composée de deux variables x & y, si ces variables sont séparées & qu'on ait $V = A + B$, A étant une fonction de x & B une fonction de y, V deviendra un *maximum*, dans le cas que A & B seront des *maximum*, & un *minimum* lorsque ces quantités seront des *minimum*. Mais on doit faire attention qu'on ne doit pas joindre le *maximum* de A avec le *minimum* de B, ou réciproquement; car alors V ne seroit ni *maximum* ni *minimum*. Si $V = A - B$, V sera *maximum*, lorsque A sera *maximum* & B *minimum*; si au contraire B est un *maximum* & A un *minimum*, V sera un *minimum*, ce qui n'a pas besoin de démonstration. Si $A = x^3 - 3x^2 - 3x$, A sera un *minimum*, lorsque l'on aura $x = 1 + \sqrt{2}$, & un *maximum*, si $x = 1 - \sqrt{2}$. Mais en supposant $B = y^4 - 8y^3 + 18yy - 8y$, l'on aura $\frac{dB}{dy} = 4y^3 - 24y^2 + 36y - 8$. Supposant $\frac{dB}{dy} = 0$, l'on trouve $4y^3 - 24yy + 36y - 8 = 0$, ou $\frac{dB}{4dy} = y^3 - 6yy + 9y - 2 = 0$. Les racines de cette équation sont $y = 2$, $y = 2 \pm \sqrt{3}$; donc puisque $\frac{ddB}{4dy^2} = 3yy - 12y + 9$ devient $= -3$ dans la supposition de $y = 2$, dans ce cas B sera un *maximum*. Pour les autres racines qui viennent de l'équation $yy - 4y + 1 = 0$, l'on a $\frac{ddB}{12dy^2} = 2$; donc l'une & l'autre donne un *minimum*; donc A + B sera un *maximum*, si on sup-

pose $y = 2$ & $x = 1 - \sqrt{2}$, & alors $V = A + B = 3 + 4\sqrt{2}$. Mais V sera un *minimum*, si on suppose $x = 1 + \sqrt{2}$ & $y = 2 + \sqrt{3}$, ou $y = 2 - \sqrt{3}$; & dans l'un & l'autre cas on aura $V = -6 - 4.\sqrt{2}$. $B - A$ sera un *maximum*, si $y = 2$ & $x = 1 + \sqrt{2}$, & alors $B - A = 13 + 4\sqrt{2}$. Mais on aura un *minimum*, si on fait $y = 2 \pm \sqrt{3}$ & $x = 1 - \sqrt{2}$, & dans ce cas $B - A$ sera $= 4 - 4\sqrt{2}$. Au reste il s'agit ici des *maxima* & des *minima* de la premiere espéce.

Si V est une fonction des variables x & y mêlés ensemble, l'on aura $dV = p\,dx + q\,dy$, p & q étant des fonctions d'une des variables ou de toutes les deux. Maintenant supposant $p = 0$ & $q = 0$, on aura deux équations qui feront connoître x & y; mais pour le *maximum* ou le *minimum*, on joindra ensemble deux valeurs, l'une de x & l'autre de y, qui puissent ensemble rendre V *maximum* ou *minimum*. Mais on doit avoir l'attention de ne joindre que le *maximum* avec le *maximum* & le *minimum* avec le *minimum*. Pour trouver les valeurs de x, qui peuvent rendre V *maximum* ou *minimum*, on considerera y comme constant, & l'on différenciera V dans cette supposition pour avoir $dV = p\,dx$ & $\frac{dV}{dx} = p$. Différenciant p dans la même supposition de y constant, l'on a $\frac{ddV}{dx} = dp$, $\frac{ddV}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$.

Maintenant on examinera si $\frac{dp}{dx}$ (apres avoir substitué les valeurs qu'ont donné les équations $p = 0$ & $q = 0$) est positif ou négatif; le premier cas indique un *minimum*, mais le second cas indique un *maximum*.

De même en supposant x constant, l'on a $dV = q\,dy$, $\frac{dV}{dy} = q$, $\frac{ddV}{dy} = dq$, $\frac{ddV}{dy^2} = \frac{dq}{dy}$ (*).

Substituant dans $\frac{dq}{dy}$ les valeurs de x & de y données par

(*) Il est aisé de voir qu'on suppose dy constant, comme en différenciant V dans la supp[osit]ion de x variable, on a supposé dx constant.

les équations $q = o$ & $p = o$, on examinera si $\frac{dq}{dy}$ est positif ou négatif ; le premier cas indique un *minimum* & le second cas indique un *maximum*. Si $\frac{dp}{dx}$ est positif & que les mêmes valeurs de y & de x rendent $\frac{dq}{dy}$ négatif ou réciproquement, l'on n'a ni *maximum* ni *minimum*. Si ces formules ou l'une des deux devient $= o$, on aura recours à $\frac{ddp}{dx^2}$, & $\frac{ddq}{dy^2}$ (*). Si ces formules ne s'évanouissent pas, l'on n'aura ni *maximum* ni *minimum* ; si elles s'évanouissent, on aura recours à $\frac{dddp}{dx^3}$, $\frac{d^3q}{dy^3}$, &c.

98. PROBLÈME. *Dans quels cas* $V = x^3 + y^3 - 3axy$ *devient* maximum *ou* minimum ? L'on a $dV = 3xxdx + 3yydy - 3aydx - 3axdy$; donc $p = 3xx - 3ay$, $q = 3yy - 3ax$. Supposant $p = o$ & $q = o$, l'on a $3xx - 3ay = o$, $xx = ay$, $y = \frac{xx}{a}$, & $y^2 = \frac{x^4}{aa}$. Mais l'équation $q = o$ donne $yy = ax$; donc $ax = \frac{x^4}{aa}$, $a^3 x = x^4$, $a^3 = x^3$, $x = a$. L'équation $a^3 x = x^4$, donne aussi $x^4 - xa^3 = o$ ou $x = o$; si l'on substitue ces valeurs de x dans $y = \frac{xx}{a}$, l'on a $y = a$ ou $y = o$; mais $\frac{dp}{dx} = 6x$, $\frac{ddp}{dx^2} = 6$, $\frac{dq}{dy} = 6y$, $\frac{ddq}{dy^2}$

(*) Si $\frac{dp}{dx}$ s'évanouit seul, alors on a recours seulement à $\frac{ddp}{dx^2}$ pour ce qui regarde x, & l'on revient pour y à la formule $\frac{dq}{dy}$, ou réciproquement.

$= 6.$

$= 6$. En supposant $x = 0$ & $y = 0$, il vient $\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dy} = 0$, & dans le cas de $x = a$ & $y = a$, l'on a $\frac{dp}{dx} = 6a = \frac{dq}{dy}$. Donc l'on a un *minimum* pour ce cas, & alors $V = -a^3$

99. Si l'on avoit $V = A + B + C$, A étant une fonction de x, B une fonction de y, C une fonction de z, V seroit un *maximum* ou un *minimum*, dans les mêmes cas que A, B, C seroient à la fois chacun un *maximum* ou un *minimum*. Mais si l'on avoit $A + B - C$, en considérant $A + B$ comme une fonction de x & de y, cette quantité seroit un *maximum*, lorsque $A + B$ seroit un *maximum* & C un *minimum*. Si C étoit un *maximum* & $A + B$ un *minimum*, cette quantité seroit un *minimum*. De même en faisant $V = A - B - C$, l'on auroit un *maximum*, lorsque A seroit un *maximum*, $B + C$ étant un *minimum*. Mais si A étoit *minimum*, $B + C$ étant *maximum*, V seroit un *minimum*. Or par les principes précédens, il est aisé de voir dans quels cas A, B & C deviennent *maxima* & *minima*; donc on peut trouver les *maxima* & les *minima* de ces sortes de quantités. Si V étoit une fonction de x, y, z mêlés ensemble, de maniere qu'on eût $dV = p\,dx + q\,dy + r\,dz$, on supposeroit $p = 0$, $q = 0$ & $r = 0$. Ces équations suffisent pour faire connoître x, y & z. On fera attention ensuite que $p\,dx$ représente la différence de V, en faisant varier x seulement; donc $dV = p\,dx$, & dans cette supposition $\frac{dV}{dx} = p$. Différenciant encore dans la même supposition, l'on aura $\frac{ddV}{dx} = dp$, $\frac{ddV}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$. On examinera si $\frac{dp}{dx}$ (en substituant les valeurs de x, y, z trouvées par les équations $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$) est une quantité positive ou négative; le premier cas indiquera un *minimum*, le second cas indique un *maximum*. On portera le même jugement pour la quantité $\frac{ddV}{dy^2} = \frac{dq}{dy}$, qu'on trouve en faisant

varier seulement y, & pour $\frac{ddV}{dz^2} = \frac{dr}{dz}$, qu'on trouve en faisant varier seulement la quantité z. On aura soin de ne joindre ensemble que des *maxima* & des *minima*. Si l'on trouve un *maximum* seulement pour une variable & des *minima* pour les autres variables, ou des *maxima* pour deux variables, & un *minimum* pour la troisiéme variable, &c. l'on n'aura ni *maximum* ni *minimum*. Si $\frac{dp}{dx} = 0$, on aura recours à $\frac{ddp}{dx^2}$; de même si $\frac{dq}{dy} = 0$, on aura recours à $\frac{ddq}{dy^2}$; &c. De même si $\frac{dr}{dz} = 0$, on examinera $\frac{ddr}{dz^2}$; si $\frac{ddq}{dy^2}$, $\frac{ddp}{dx^2}$, $\frac{ddr}{dz^2}$ ne s'évanouissent pas, l'on n'aura ni *maximum* ni *minimum*; si ces quantités sont $= 0$, on aura recours à $\frac{d^3p}{dx^3}$, $\frac{d^3q}{dy^3}$, $\frac{d^3r}{dz^3}$; &c.

100. PROBLÈME. *Dans quel cas* $V = x^3y - 12xyz^2 + \frac{64zy^3}{27} + \frac{128z^3}{3}$ *devient* maximum *ou* minimum? L'on a $dV = 3x^2y\,dx - 12yz^2dx + x^3 \times dy - 12xzz\,dy + \frac{64zy^2dy}{9} + 128z^2dz + \frac{64y^3dz}{27} - 24xyz\,dz$; donc en faisant $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, l'on aura $p = 3x^2y - 12yz^2 = 0$, $q = x^3 - 12xz^2 + \frac{64zy^2}{9} = 0$, $r = 128z^2 + \frac{64y^3}{27} - 24xyz = 0$. La premiere équation donne (en transposant & divisant par $3y$) $xx = 4z^2$, ou $x = 2z$ (A). Substituant cette valeur de x dans la seconde équation, il vient $8z^3 - 24z^3 + \frac{64zy^2}{9} = 0$, ou $-16z^2 + \frac{64y^2}{9} = 0$, ou $\frac{64}{9} \times y^2 = 16z^2$, ou $\frac{2}{3}y$.

$= 4z$, ou $y = \frac{12z}{8} = \frac{3z}{2}$ (B). Substituant dans la troisiéme équation les valeurs de x & de y, prises des équations A & B, il vient $128z^2 + \frac{64.27z^3}{27.8} - 24 \times 2 \times$ [illegible] $z^3 = 0$, ou $8.8.2 + 8z - 8.9z = 0$, ou $16 + z - 9z = 0$, ou $16 = 8z$ & $z = 2$. Substituant cette valeur de z dans les équations A & B, l'on trouve $x = 4$ & $y = 3$. Maintenant $\frac{dp}{dx} = 6xy = 72$, qui indique un *minimum*, $\frac{dq}{dy} = \frac{[illegible]28\,yz}{9} = \frac{8.8.2.3.2}{3.3}$, quantité positive qui indique aussi un *minimum*. Mais $\frac{dr}{dz} = 128 \times 2z - 24x.y = 512 - 288 = 224$; quantité positive qui indique encore un *minimum*; donc la fonction V deviendra un *minimum*, en supposant $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$, & alors $V = 85\frac{1}{3}$; & soit qu'on suppose les quantités x, y, z, augmentées ou diminuées d'une quantité fort petite f, on aura un résultat plus grand.

On doit remarquer que si les équations $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ &c. donnoient pour les variables x, y, z &c. des valeurs imaginaires ou contradictoires, dans ce cas on n'auroit ni *maximum* ni *minimum*. Il peut encore arriver qu'on trouve un *minimum* tel qu'il ne soit pas possible d'en avoir un plus petit, ce qui vient des puissances paires des variables qui se trouvent dans la valeur de V. C'est ainsi que $V = xx + xy + y^2 - x - y$ est un *minimum* $= -\frac{1}{3}$, lorsque $x = \frac{1}{3}$ & $y = \frac{1}{3}$ & qu'il est impossible de le rendre plus petit, s'entend en regardant les quantités négatives comme au-dessous de o: car autrement cela seroit très-possible.

Si $V = A + B + C + D + E + F +$ &c, A étant une fonction de x, B une fonction de y, C une fonction de z, E une fonction de x', D une fonction de x'', &c, V sera un *maximum* ou un *minimum*, lorsque A, B, C, &c. seront à la fois des *maximum* ou des *minimum*. Mais si $V = A + B - C - D$, pour que V soit un *maximum*, il faut que la quantité $- C - D$, qui est soustraite, soit un *minimum*, lorsque la quantité $A + B$ dont on soustrait est un *maximum*. Mais V sera un *minimum*, si la quantité dont on soustrait est un *minimum* & la quantité soustraite un *maximum*.

si V est une fonction des variables x, x', x'' &c. y, y', y'' &c. z, z', z'' &c. mêlés ensemble, l'on aura $dV = p\,dx + p'\,dx' + p''\,dx'' +$ &c. $+ q\,dy + q'\,dy' + q''\,dy'' +$ &c. $+ r\,dz + r'\,dz' + r''\,dz''$ &c, & l'on fera $p = 0$, $p' = 0$, $p'' = 0$, $q = 0$, $q' = 0$, $q'' = 0$, $r = 0$, $r' = 0$, $r' = 0$, &c. De ces équations, par les régles ordinaires de l'Algébre, on tâchera de tirer les valeurs de x, x' &c. on aura ensuite $\frac{dV}{dx} = p$, $\frac{ddV}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, $\frac{ddV}{(dx')^2} = \frac{dp'}{dx'}$, &c. Si ces quantités sont positives, elles indiqueront des *minima*, & des *maxima* si elles sont négatives; mais si une valeur de x indique un *maximum* & que la valeur de x' indique un *minimum*, ces valeurs de x & x' ne donneront pour V ni *maximum* ni *minimum*. Si $\frac{dp}{dx}$, &c $= 0$, on examinera si $\frac{ddp}{dx^2}$, $\frac{ddp'}{(dx')^2}$ &c. s'évanouissent ou non, si ces quantités ne s'évanouissent pas, l'on n'aura ni *maximum* ni *minimum*. Si $\frac{ddp}{dx^2}$ disparoît, on examinera si $\frac{d^3p}{dx^3}$ est positif ou négatif. Le premier cas indique un *minimum*, le second cas indiquant un *maximum*.

De même si l'on a $\frac{ddp}{(dx')^2} = 0$, si $\frac{d^3p'}{(dx')^3}$ est positif, le *minimum* est indiqué; au contraire le *maximum* est indiqué, si cette quantité est négative &c. Mais si un *maximum* ou un *minimum* étant indiqué par $\frac{d^3p}{dx^3}$, $\frac{d^3p'}{(dx')^3}$ &c, $\frac{ddq}{dy^2}$ ne s'évanouissoit pas, ce qui indiqueroit que la valeur de y (ou aucune des valeurs de y, si aucune d'elles ne peut faire évanouir cette quantité) ne peut donner ni *maximum* ni *minimum*; dans ce cas l'on n'auroit ni *maximum* ni *minimum*. Si les équations $p = 0$, $p' = 0$ &c. donnoient plusieurs valeurs pour les variables x, x' &c. il faudroit joindre ensemble celles qui donnent à la fois un *maximum* ou un *minimum*, & rejetter les autres comme inutiles.

Des développées & des rayons osculateurs.

101. Si on conçoit qu'un fil enveloppant une courbe ABC (fig. 64) vienne à se développer en restant toujours tendu sans cependant s'allonger, l'extrémité A de ce fil décrira une courbe AFN, qu'on appelle *courbe de développement*, la courbe ABC s'appelle *la développée*, les portions BE, CF &c. du fil sont appellées *rayons de la développée*.

COROLLAIRE I. Si le fil se termine au sommet A de la développée, il est évident que chaque partie BE de ce fil est égale à l'arc développé AB; mais chaque rayon FC sera plus grand que l'arc correspondant, si on suppose que le sommet de la développée est en B, de maniere que AB soit une ligne droite. En général le rayon de la développée est égal à l'arc développé, en ajoutant une constante, s'il le faut.

COROLLAIRE II. Chaque rayon BE de la développée pouvant être regardé comme le prolongement de l'arc infiniment petit BC, arc qui peut être considéré comme une ligne droite, il est visible, 1°. que chaque rayon de la développée est tangente de la développée; 2°. que le fil BE en passant de EB en FC, décrit un petit arc EF, qu'on peut regarder comme un arc circulaire dont le centre seroit en C; de maniere que le rayon FC est perpendiculaire à la tangente FT au point F de la ligne de développement (car le rayon d'un cercle est perpendiculaire à la tangente du cercle qui aboutit à l'extrémité de ce rayon, voyez la Géométrie. Donc si des extrémités E, F d'un arc infiniment petit d'une courbe, l'on tire deux perpendiculaires EC, FC, ces perpendiculaires se rencontreront en un point C, qui sera un point

de la développée de la courbe donnée, & l'on pourra regarder l'arc EF comme un arc circulaire décrit du centre C. Mais parce que les cercles sont d'autant moins courbes, que leurs rayons sont plus grands, il est visible que la courbe de développement deviendra d'autant moins courbe qu'elle s'éloignera plus du point A, où aboutit le rayon de la développée qui est = o ou qui est le plus petit. Ainsi la plus grande courbure se trouvera en cherchant le plus petit rayon, & la moindre courbure se trouvera en cherchant le plus grand rayon de la développée; & cela par la méthode des *maximis* & des *minimis*.

REMARQUE. Si du point P avec un rayon FP plus grand que FC, on décrivoit un arc de cercle, cet arc passeroit au-dessus de l'arc EF. Il passeroit au contraire au-dessous de cet arc, si on prenoit un rayon *p*F plus petit que FC; donc le cercle décrit du point C avec le rayon FC, est celui qui se confond le plus exactement avec l'arc infiniment petit EF. Ce cercle est appellé *cercle osculateur*, & son rayon est appellé *rayon osculateur*, *rayon de la développée*, *rayon de courbure*, parce que la courbure de l'arc infiniment petit FE de la courbe de développement est la même que celle de l'arc correspondant du cercle osculateur.

Nous appellerons *angle de courbure* (fig. 65) d'un arc EF d'une courbe l'angle ECF que forment deux lignes perpendiculaires à cet arc menées par ses extrémités: cet angle est égal à celui que forment les deux tangentes menées par les extrémités de cet arc. En effet les angles du quadrilataire MECF valent quatre angles droits. Or les angles CEM, CFM sont droits; donc FME + FCE valent deux angles droits.

Mais FME + FMN valent aussi deux angles droits; donc ECF = FMN. De plus en regardant l'arc infiniment petit EF comme circulaire, & tirant la corde EF, l'angle NMF, extérieur au triangle EMF, vaut les deux angles intérieurs E & F; mais ces angles sont égaux, parce qu'étant faits par une corde & une tangente, ils ont chacun pour mesure la moitié de l'arc EF; donc chacun de ces angles est la moitié de l'angle de courbure. Mais si on suppose que l'arc ef est = EF & que le rayon ec est moitié du rayon EC, il est visible que l'angle ecf sera double de l'angle ECF, & que l'angle nmf sera aussi double de l'angle NMF; de sorte qu'en général les angles de courbure sont en raison inverse des rayons osculateurs; donc aussi les courbures des cercles sont en raison inverse de leurs rayons.

REMARQUE. Le triangle EMF est donc isocelle, & l'angle de courbure NMF, mesuré par l'arc EF qu'on suppose infiniment petit, est aussi infiniment petit.

COROLLAIRE. Il suit de ce que nous venons de dire, qu'un arc de courbe EF ne peut être regardé comme circulaire, ou ce qui revient au même, ne peut avoir une courbure circulaire ou un cercle osculateur, si les angles E & F ne sont chacun la moitié de l'angle NMF que forment les tangentes extrêmes, ou ce qui revient au même, si les angles E & F, formés par la corde & les tangentes extrêmes, sont inégaux.

102. COROLLAIRE II. Il suit du corollaire précédent & de la remarque précédente, qu'il y a des arcs de courbe qui n'ont aucune courbure circulaire. Soit fe (fig. 66) un arc infiniment petit d'une parabole quelconque différente de la parabole or-

dinaire, que le sommet de cette parabole soit en f, je mene l'ordonnée ep perpendiculaire à l'axe pn, la tangente en & la tangente fm (qu'on peut regarder comme l'ordonnée prolongée du point f de la courbe). L'angle de courbure fmn étant infiniment petit (remarque précédente), l'angle $mfn = epn$ étant droit, l'angle mnf ne differe d'un angle droit que d'une quantité infiniment petite ; ainsi on peut le regarder comme étant égal à l'angle nfm ; & partant le triangle mfn doit être censé isocelle, & par conséquent mn est censée $= fm$; donc $fm : me :: mn : me$. Or à cause des triangles semblables nmf & nep, $mn = mf : em :: nf : fp$. Mais dans aucune parabole (si on excepte la parabole vulgaire) nf n'est pas $= fp$; donc on n'a pas non plus $em = fm$; donc le triangle emf n'est pas isocelle ; donc les angles mef, mfe ne sont pas égaux ; donc la courbure de l'arc ef n'est pas circulaire, & il n'y a aucun cercle ni fini ni infiniment grand ni infiniment petit qui ait une courbure égale à la courbure d'un tel arc.

J'ai dit que dans aucune parabole si on excepte la parabole vulgaire, on n'a pas $nf = fp$. En effet, il faudroit qu'on eût la sous-tangente $pn = 2 . fp$; or la sous-tangente des paraboles est (10) $= \frac{(m+n)x}{n}$; donc la sous-tangente est à l'abscisse $fp = x$, comme $\frac{(m+n).x}{n} : x :: (m+n)x : nx : m+n : n$; mais dans la seule parabole ordinaire, l'on a $m = n = 1$; donc dans la seule parabole vulgaire $np : fp :: 2 : 1$; donc &c.

REMARQUE. Cependant les Géométres enseignent communément que tout arc de courbe a

une courbure circulaire; mais ce que nous venons de dire suffit pour faire comprendre ce qu'il faut penser d'une telle doctrine.

Cherchons maintenant les expressions de certaines lignes qui nous serviront pour trouver les formules du rayon osculateur; mais on doit bien sentir qu'il ne s'agit pas ici des courbures qu'ont les courbes dans quelques points singuliers,

103. Soit la courbe ABD dont AP est la ligne des abscisses (fig. 67), & dans laquelle on ait coupé les arcs infiniment petits BC, CD, qui ne doivent différer entr'eux que d'une quantité infiniment petite, par rapport à ces mêmes arcs. Qu'on mene la corde BC prolongée jusqu'en M, les ordonnées & les autres lignes que représente la figure. Faisons $Pn = BF = dx$, $CS = dx + ddx$, $BC = ds$, $AC = s$, $FC = dy$. Les triangles BFC, CSM étant semblables (à cause des parallèles BF, CS), l'on a $dx : dy :: dx + ddx : SM = \frac{dx\,dy + dy\,ddx}{dx}$; mais $SD = dy + ddy$ (*); Donc $DM = SM - SD = \frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{dx}$.

Supposant que la ligne DL représente un arc de cercle décrit du point C comme centre, cet arc pourra être regardé comme une ligne droite perperdiculaire sur CM; & comme l'angle biD est double

(*) Car lorsque dx devient $= dx + ddx$, dy devient $= dy + ddy$; mais ici x augmentant, dy va en diminuant, & l'on a ddy négatif; c'est-à-dire, que $SD = y - ddy$, ou $SD = dy + ddy$, en se souvenant que ddy est ici négatif. Si la courbe étoit convexe du côté de l'axe AR, ddy seroit positif.

de iCD, l'on a $biD = MCD$; donc cet arc mesure l'angle de courbure $CQD = biD$.

Les triangles MLD, CSM ayant l'angle M commun & les angles L & S droits, sont semblables; donc $CM : CS$ ou $BC : BF :: DM : DL$, ou $ds : dx :: \frac{dyddx - dxddy}{dx} : DL = \frac{dyddx - dxddy}{ds}$.

Si l'on suppose $DL = q$, le rayon $= 1$, & qu'on fasse $ds : 1 :: q : \frac{q}{ds} = \frac{dyddx - dxddy}{ds^2}$, l'on aura la mesure d'un angle que nous ferons aussi $= q$.

Il est bon de faire attention à cette valeur de la mesure de l'angle q, laquelle seroit négative, si la courbe étoit convexe du côté de l'axe, parce qu'alors la ligne DL seroit située du côté de l'axe.

Cela posé, en supposant que les lignes CQ, DQ sont des rayons osculateurs, l'angle Q sera $= biD = 2.iCD = LCD$; ainsi les triangles LCD, CQD sont semblables & isocelles. Donc $LD : CD :: CD : DQ$ (*) ou $\frac{dyddx - dxddy}{ds} : ds :: ds : DQ = \frac{ds^3}{dyddx - dxddy}$, valeur du rayon osculateur, que nous ferons $= R$.

Si du point Q l'on tire QN perpendiculaire sur Cn, prolongée, s'il le faut, l'on aura un triangle rectangle dont le rayon osculateur CQ sera l'hypo-

(*) La corde CD étant censée se confondre avec l'arc infiniment petit CD, est censée égale à cet arc.

thénuse, il s'agit de trouver les côtés de ce triangle (que nous appellerons *côtés du rayon osculateur*). Les angles N C S, Q C b étant droits, si l'on en retranche l'angle commun Q C S, l'on aura N C Q = S C b; ainsi les triangles C S b, C N Q seront semblables, & donneront C b : CS :: CQ : CN, & C b : b S = SD (*) :: CQ : NQ; donc

$$ds :: dx + ddx = dx :: \frac{ds^3}{dyddx - dxddy} : CN = \frac{dxds^2}{dyddx - dxddy}, \ \& \ ds : dy :: \frac{ds^3}{dyddx - dxddy} :$$

$$NQ = \frac{dyds^2}{dyddx - dxddy}.$$

Les expressions ci-dessus deviendront plus simples, en supposant quelque différentielle constante. Si on suppose dx constant, l'on a $ddx = 0$; R $= \frac{-ds^3}{dxddy}$; CN $= \frac{-ds^2}{ddy}$; NQ $= \frac{-dyds^2}{dxddy}$. Si on suppose dy constant, l'on a $ddy = 0$ & R $= \frac{ds^3}{dyddx}$, [illegible] $= \frac{dxds^2}{dyddx}$, & NQ $= \frac{ds^2}{ddx}$. Si par l'équation de la courbe, après avoir éliminé les différentielles, l'on trouve le

(*) Car l'angle b C D étant infiniment petit, le côté b D qui lui est opposé est infiniment petit par rapport à C D, qui est infiniment petit du premier ordre, aussi bien que S D; donc D b est infiniment petit, par rapport à S D; donc la ligne S D est censée = S b. De plus l'arc infiniment petit C D est censé se confondre avec sa tangente, & l'on peut supposer que cet arc est égal à la tangente C b = C x, puisque C x & C b ne peuvent différer que de x b, quantité infiniment petite par rapport à C b, qui est infiniment plus grand que b D; or b D, D x, x b sont de même espèce.

rayon oſculateur R ou le côté CN poſitif, la courbe ſera concave du côté de l'axe ; au contraire la courbe tournera ſa convexité vers ſon axe, ſi le rayon oſculateur eſt négatif, ou ſi le côté CN eſt négatif.

Si on ſuppoſe ds conſtant, l'on aura $dds = 0$. Mais $ds^2 = dx^2 + dy^2$; donc $2ds.dds = 2dx.ddx + 2dy.ddy = 0$, & $ddy = -\frac{dx.ddx}{dy}$. Si l'on ſubſtitue cette valeur de ddy dans l'expreſſion du rayon oſculateur, nous aurons $R = \frac{ds^3.dy}{dy^2.ddx + dx^2.ddx} = \frac{ds^3.dy}{ds^2\,ddx} = \frac{ds\,dy}{ddx}$.

Les formules que nous venons de trouver ont lieu, ſi les ordonnées ſont perpendiculaires aux abſciſſes.

Si l'angle BTA des co-ordonnées n'eſt pas droit, ſoit le *ſinus* de cet angle $= a$, ſon *coſinus* $= c$, $AT = x$, $TB = y$. Le triangle rectangle BPT donne (en ſuppoſant le rayon $= r$), $r : a :: y : BP = \frac{ay}{r}$, $r : c :: y : PT = \frac{cy}{r}$; donc $AP = x - \frac{cy}{r}$; c'eſt pourquoi en mettant dans les formules ci-deſſus $x - \frac{cy}{r}$ au lieu de x, $\frac{ay}{r}$ au lieu de y (*), vous aurez les valeurs données en

(*) Au lieu de dx, on mettra la différentielle de $x - \frac{cy}{r}$; au lieu de ddx, on mettra la ſeconde différentielle de la même quantité; au lieu de dy, ddy, l'on mettra $\frac{ady}{r}$, $\frac{addy}{r}$.

AT & BT. Ayant fait les substitutions, l'on a R $= \frac{r\,ds^3}{a.(dy\,ddx - dx\,ddy)}$, CN $= \frac{(r\,dx - c\,dy)\,ds^2}{a(dy\,ddx - dx\,ddy)}$,

NQ $= \frac{dy\,ds^2}{dy\,ddx - dx\,ddy}$.

Sans faire mention de différentes autres méthodes par lesquelles on peut trouver des formules pour le rayon osculateur, nous en donnerons une, par le moyen de laquelle on évite les différences secondes.

Soit la courbe PC, rapportée à son axe AR (fig. 68), en supposant les ordonnées perpendiculaires aux abscisses, qu'on tire les lignes CQ, DQ perpendiculaires à l'arc infiniment petit CD, & les ordonnées CL, DR. Ayant pris Cf égale à une constante b, on menera par le point f la ligne fm perpendiculaire à CQ, & par conséquent parallèle à l'arc CD, qu'on peut regarder comme une ligne droite, ce qui donnera Do = Cf; par le point o menez la ligne ot perpendiculaire à DQ, & qui rencontrera CQ en n. Cela posé, soit AL $= x$, LC $= y$; donc CS $= dx$, DS $= dy$, & faisant Cm $= p$, l'on aura $nm = dp$. Les triangles DSC, fmC ayant les angles S & m droits & les angles DCS, fCm égaux (car si des angles droits SCL, QCD l'on retranche l'angle SCm, il restera les deux angles dont on vient de parler), sont semblables; ainsi DS : DC :: fm : fC, ou DS $\times$ fC $=$ DC $\times$ fm. Et parce que les triangles omn, Qtn sont semblables, & que Qtn est semblable à QCD, l'on a DC : mn :: QC : $om = fm$, (parce que les ordonnées CL, DR étant supposés infiniment proches, le point o est censé se confondre avec le point f); donc DC $\times$ fm =

QC × mn; donc DS × fC = QC × mn, ou DS : mn :: QC : fC, ou $dy : dp :: R : b$; donc $R = \frac{b\,dy}{dp}$; mais les triangles semblables CSD, Cfm donnent $p : b :: dx : ds$; donc $p = \frac{b\,dx}{ds}$. Par cette formule on déterminera facilement p, & par conséquent aussi dp.

Si les ordonnées partent d'un point fixe F (fig. 69), ayant tiré les ordonnées qu'on voit dans la figure, la corde BCL prolongée jusqu'à la rencontre de l'arc DL décrit du point C avec le rayon CD, la tangente Cb (qui est censée égale à l'arc CD), avec les rayons osculateurs CQ, DQ; il est visible qu'en considérant l'arc infiniment petit BCD comme circulaire, l'angle LCD, formé par une corde & le prolongement d'une autre corde, aura pour mesure (voyez la Géométrie) la moitié de la somme des arcs sous-tendus par ces cordes; & comme on peut supposer ces arcs tels qu'ils ne différent entr'eux que d'une quantité infiniment petite, par rapport à eux, cet angle aura pour mesure l'arc CD = BC, & sera = CQD, tandis que l'angle bCD formé par la tangente, & la corde CD est $= \frac{CQD}{2}$.

Si on suppose que le point C de la courbe est le point d'où partent les ordonnées; à cause que l'angle LCD est égal à l'angle de courbure, si nous supposons que la mesure de l'angle DCL (prise dans un cercle dont le rayon soit = 1) est = dx, l'on aura $1 : dx :: CD = dy$ (en supposant CD inassignable) : DL = $dy.\,dx$.

Mais les secteurs CQD, LCD sont semblables, donc $QD = R : CD = dy :: CD\ (dy) : DL = dy.\ dx$; donc alors au pôle C l'on a $R = \frac{dy}{dx}$, ce qui est un cas particulier.

Supposons maintenant que les ordonnées partent du point F (fig. 69), situé comme l'on voudra par rapport à la courbe, du point F je décris l'arc $Cm = dx$, & je tire FM perpendiculaire sur QC, les triangles FCM, DCm ont les angles M & m droits & les angles FCM, DCm égaux (*). Donc ils sont semblables; ainsi en faisant $FC = y$, l'on aura $Dm\ (dy) : DC :: FM : FC = y$. Mais ayant tiré F$t$ perpendiculaire sur QD, les triangles FMu, Qut sont semblables; donc aussi QDC semblable à utQ(**), sera semblable à FMu; & partant $DC : Mu = dp$ (en faisant $CM = p$) :: CQ (R) : FM; donc puisque les termes moyens de la premiere proportion sont les mêmes que les extrêmes de la derniere, l'on aura $dy \times y = dp \times R$, ou $R = \frac{y\,dy}{dp}$; mais les triangles CDm, FMC donnent $FC : CM :: CD : Cm$, ou $y : p :: ds : dx$; donc $p = \frac{y\,dx}{ds}$.

Si dans la formule $R = \frac{y\,dy}{dp}$, l'on substitue la valeur de dp prise de l'équation $p = \frac{y\,dx}{ds}$,

(*) Car si à chacun de ces angles l'on ajoute l'angle QCm, l'on aura les angles droits FCm, QCD.

(**) Car on peut regarder ut perpendiculaire à QD comme parallèle à CD.

qui donne $dp = \frac{dydxds + yddxds - ydxdds}{ds^2}$,

l'on aura $R = \frac{ydyds^2}{ds(dydx + yddx) - ydxdds}$;

& parce que $\overline{ds}^2 = dx^2 + dy^2$ (*), & par conséquent $ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$, le dénominateur de la valeur de R deviendra, en substituant la valeur de dds, qui est $\frac{dxddx + dyddy}{ds}$, deviendra, dis-je,

$= \frac{ds^2(dydx + yddx) - ydx.(dxddx + dyddy)}{ds}$,

ou en faisant les multiplications indiquées, substituant la valeur de ds^2 & réduisant, $\frac{dy(dx^3 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy)}{ds}$; donc en divisant $ydyds^2$ par cette quantité, & effaçant ensuite dy, qui se trouvera au numérateur, & au dénominateur du quotient, l'on a $R = \frac{yds^3}{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}$

$= \frac{yds^3}{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}$.

Si on suppose dx constant, l'on a $ddx = 0$ & $R = \frac{yds^3}{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}$. Si dy est constant, il vient $R = \frac{yds^3}{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx}$. Si

(*) Car le triangle $Cm D$ est rectangle. L'expression de ds^2 est la même, lorsque les ordonnées sont perpendiculaires aux abscisses.

du

du point Q (fig. 70), l'on tire QN perpendiculairement sur le rayon FC, nous appellerons côtés du rayon osculateur les lignes QN & CN, QN sera appellé *le premier côté* & CN *le second côté du rayon osculateur*. Pour les déterminer, je remarque que si des angles droits FCm, QCD l'on retranche l'angle commun QCm, les restes NCQ, mCD seront égaux; donc les triangles rectangles QNC, mCD sont semblables & donnent CD : Cm :: CQ : CN, & CD : Dm :: CQ : NQ; donc 1° $CN = \frac{Cm.CQ}{CD} = \frac{ydxds^2}{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}$; donc 2° $NQ = \frac{CQ.Dm}{CD} = \frac{ydyds^2}{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}$; en supposant successivement dx & dy constans, ces formules deviendront plus simples. Si la valeur de R & de CN est positive, la courbe tournera sa concavité du côté du pôle; si le contraire arrive, la courbe tournera sa convexité au pôle.

Pour faire usage des formules ci-dessus, si les courbes sont rapportées à un axe, il faut éliminer l'une des variables x, ou y par le moyen de l'équation de la courbe, & l'on parviendra à une formule qui contiendra la valeur du rayon & des côtés du rayon R en termes finis. Si la courbe est rapportée à un foyer, il faut chasser dx, & trouver le rayon R & ses côtés exprimés en y.

REMARQUE. Dans les formules qui ne supposent aucune différence constante, en éliminant une des secondes différences par le moyen de

l'équation de la courbe, on éliminera toujours l'autre seconde différence; de sorte qu'en éliminant ddx, on éliminera les deux termes $dyddx - dxddy$. Car soit l'équation de la courbe $dx = qdy$, q étant une fonction de x & de y, l'on aura $ddx = dq.dy + qddy$; donc $dyddx = dy \times (dq.dy + qddy)$, $dyddx - dxddy = dy \times (dq.dy + qddy) - dxddy = dqdy^2 + qdyddy - qdyddy$ (en substituant la valeur de dx) $= dqdy^2$, quantité qui ne contient aucune seconde différence.

Ayant trouvé le rayon osculateur & ses côtés de ce rayon, pour déterminer la développée d'une courbe BD (fig. 71), on la rapportera à son axe AP, & faisant $AL = x$, $LC = y$, on aura une équation entre x & y, & de plus le rayon QC aussi bien que ses côtés, seront donnés en x & y. Le point Q étant un point de la développée, de ce point je tire $QP = q$, ordonnée à l'axe AP. q sera donc l'ordonnée de la développée, dont l'abscisse sera $AP = p$; & parce que $NQ = LP$ & $LN = CL - CN = y - CN$, l'on aura deux autres équations $p = x + QN$, $q = y - CN$, dans lesquelles QN, CN sont donnés en x & y. L'on a donc trois équations; & si par le moyen de deux de ces équations on élimine x & y, l'on aura une équation entre p & q, qui exprimera la nature de la développée.

Si la courbe BD (fig. 70) est rapportée au foyer F, & qu'on ait l'équation entre $FC = y$ & $Cm = dx$, on pourra avoir le rayon osculateur & les côtés de ce rayon exprimés en y. Ayant prolongé le rayon DQ jusqu'en P, de maniere que P soit le centre de l'arc, suivant Db,

la développée passera par les points Q & P. Je mene les lignes F Q (rayon de l'arc Q M) & F P; Je fais F Q $= p$, Q M $= dq$; il faut trouver une équation entre p & dq. La ligne PQ est la différence entre le rayon de l'arc CD & celui de l'arc D b; donc cette ligne est la différentielle du rayon osculateur. D'autre côté MP $= dp$, & de plus le triangle rectangle QMP donne PQ, ou la différentielle du rayon osculateur, ou la différentielle de la développée $= \sqrt{dp^2 + dq^2}$. D'ailleurs $FQ = p = \sqrt{(FN)^2 + (QN)^2}$, ou (parce que $FN = y - CN$), $p = \sqrt{(y - CN)^2 + QN)^2}$; mais C N & Q N sont censés donnés en y; donc on aura deux équations avec trois inconnues y, p, dq; & en éliminant y, on aura une équation entre p & dq, qui appartiendra à la développée.

104. PROBLÊME. *Trouver le rayon osculateur de la parabole vulgaire A C (fig. 72).* Je prends la formule $R = \frac{b\,dy}{dp}$, dans laquelle $p = \frac{b\,dx}{ds}$, & je cherche d'abord la valeur de p. Soit le paramêtre de la parabole $= 2a$, l'équation de cette courbe sera $2ax = yy$; donc $2a\,dx = 2y\,dy$, $dx = \frac{y\,dy}{a}$, & $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ sera $= \sqrt{(\frac{y^2 dy^2}{aa} + dy^2)} = \sqrt{(\frac{yy\,dy^2 + aa\,dy^2}{aa})} = \frac{dy}{a}.\sqrt{(y^2 + aa)}$; ainsi $p = \frac{b\,dx}{ds} = \frac{by}{\sqrt{(yy + aa)}}$; donc $dp = \frac{b\,dy}{\sqrt{(yy + aa)}}$

$-\frac{by^2 dy}{(yy+aa)^{\frac{3}{2}}}$ (*)$=\frac{aabdy}{(yy+aa)^{\frac{3}{2}}}$; donc $R=\frac{bdy}{dp}$ $=\frac{(yy+aa)^{\frac{3}{2}}}{aa}$. Or a eſt la moitié du paramêtre ; donc la ſous-normale $LP = a$. De plus $\sqrt{(yy + aa)}$ eſt la normale ; ainſi le rayon oſculateur de la parabole eſt égal au cube de la normale diviſé par le quarré de la moitié du paramêtre.

Pour déterminer la développée de la parabole, je cherche les côtés CN & NQ. Ayant tiré la ligne CQ perpendiculaire à la tangente au point C correſpondant à l'ordonnée LC & égale à la quantité que nous venons de trouver, les triangles rectangles CLP, CNQ donneront CP : CL :: CQ : $CN = \frac{CQ \times CL}{CP} = \frac{y.(yy+aa)}{aa}$. Les mêmes triangles donnent CL : CN :: LP : NQ $=\frac{CN.LP}{CL} = \frac{yy+aa}{a}$; de-là on tire les équations ſuivantes $p=x+NQ$ (**) $= x + \frac{yy+aa}{a} = \frac{yy}{2a} + \frac{yy+aa}{a}$ (***), ou $2ap = 3yy+2aa$ (A), $q=CN-y=\frac{y.(yy+aa)}{aa} - y = \frac{y^3}{aa}$, ou $aaq=y^3$. Je multiplie l'équation A par y, & je la diſpoſe ainſi $2ay.(p-a)$

(*) On prend la différentielle en faiſant varier d'abord le numérateur & enſuite le dénominateur, qu'on peut faire paſſer au numérateur en lui donnant l'expoſant $-\frac{1}{2}$.

(**) On a parlé ci-deſſus de cette équation.

(***) Car l'équation $2ax=yy$ donne $x=\frac{yy}{2a}$.

$= 3y^3$; donc $2ay.(p-a) = 3aaq$, ou $2y.(p-a) = 3aq$, & $y^3 = \frac{27}{8} \times \frac{a^3 q^3}{(p-a)^3}$. Subſtituant cette valeur de y^3 dans l'équation $aaq = y^3$; il vient $a^2 q = \frac{27 . a^3 q^3}{8.(p-a)^3}$, ou $\overline{p-a}^3 = \frac{27a}{8} \times q^2$, équation à la ſeconde parabole cubique, que l'on peut conſtruire de la maniere ſuivante. Je prends $AM = a$ (c'eſt le demi-paramètre de la parabole propoſée), & regardant MR comme l'axe des abſciſſes, je fais le quarré de chaque ordonnée RQ égal au cube de $p-a$ ou égal au cube de MR diviſé par le paramètre $\frac{27a}{8}$; de-là on peut conclure 1° que CQ eſt $= a$ lorſque $y = 0$, c'eſt-à-dire, au ſommet A de la parabole; donc au ſommet de la parabole le rayon oſculateur eſt égal au demi-paramètre. 2°. L'on peut avoir facilement la rectification de la ſeconde parabole cubique, puiſque l'arc MQ eſt égal à la différence entre le rayon oſculateur CQ & la ligne AM; donc l'arc $MQ = \frac{(yy + aa)^{\frac{3}{2}}}{aa} - a$; mais $yy = \frac{2ap - 2aa}{3}$; donc $MQ = \frac{(2ap + aa)^{\frac{3}{2}}}{aa\sqrt{27}} - a$.

REMARQUE. La branche AF aura pour développée la branche MS, & la ſeconde parabole cubique a un point de rebrouſſement M correſpondant au plus petit rayon oſculateur MA; & ſi l'on compte les co-ordonnées depuis le point M, & que l'on faſſe $MR = p - a = y$, les abſciſſes (comptées ſur la ligne bM) $RQ = Mb = x$, le paramètre $= g$, l'on aura $y^3 = gx^2$,

équation de la développée. Et il eſt aiſé de voir que toutes les courbes qui ont un point de plus grande courbure ou de plus petite courbure, ont une développée qui a deux branches, & que le point de cette développée correſpondant au plus grand ou au plus petit rayon oſculateur, eſt un point de rebrouſſement.

Ce que nous venons de dire ſuffit pour faire ſentir la vérité de cette propoſition, dans le cas que le rayon oſculateur eſt un *minimum*. Ce que nous allons dire ſur la développée de l'ellipſe, pourra faire comprendre la vérité de la propoſition, lorſque le rayon oſculateur eſt un *maximum*.

105. PROBLÊME. *Trouver le rayon oſculateur de l'ellipſe & de l'hyperbole* (*fig.* 73 & 74). Soit l'axe $= a$, le paramètre $= p$ l'abſciſſe AL $= x$; donc on aura $y^2 = px \mp \frac{pxx}{a}$, & $y = \sqrt{(px \mp \frac{pxx}{a})}$. Différenciant, l'on trouvera la valeur de dy, & différenciant encore, dans la ſuppoſition de dx conſtant, l'on aura la valeur de ddy. Subſtituant ces valeurs dans la formule ci-deſſus (103) $\frac{ds^3}{-dx\,ddy}$, en ſe ſouvenant que $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, on trouvera R $=$

$$\frac{(aapp \mp 4appx + 4ppxx + 4a^2px \mp 4apx^2)}{2a^3p^2} \times$$

$$\sqrt{(a^2p^2 \mp 4appx + 4ppxx + 4aapx \mp 4apx^2)}.$$

Mais en cherchant la valeur de la normale, qui (34) eſt $= \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$, l'on a, dis-je, cette normale $=$

$$\frac{\sqrt{(a^2p^2 \mp 4appx + 4ppxx + 4aapx \mp 4apx^2)}}{2a},$$

quantité que je fais $= m$, Si l'on éleve cette quantité au cube, qu'on la divise par p^2 & que l'on la multiplie par 4, ou, ce qui revient au même, si on divise le cube de cette quantité par $\frac{1}{4}p^2$, l'on aura $R = \frac{m^3}{\frac{1}{4}p^2}$; donc dans l'ellipse & l'hyperbole, le rayon osculateur est égal au cube de la normale, divisé par le quarré de la moitié du paramètre.

Dans le cercle la normale & le demi-paramètre sont égaux au rayon; donc dans le cercle le rayon osculateur est égal au rayon du cercle, & la développée du cercle est un point qui n'est autre chose que le centre du cercle.

COROLLAIRE I. Il suit de-là & du n°. 104, que dans toute section conique le rayon osculateur est égal au cube de la normale divisé par le quarré du demi-paramètre.

COROLLAIRE II. Si on suppose $x = 0$, l'on a $R = \frac{(aapp)\sqrt{(a^2p^2)}}{2a^3p^2} = \frac{a^3p^3}{2a^3p^2} = \frac{1}{2}p$; donc au sommet A le rayon osculateur de l'ellipse & de l'hyperbole sera égal au demi-paramètre, & parce que dans la parabole (104) l'on a $R = \frac{(yy + aa)^{\frac{3}{2}}}{aa}$, & qu'au sommet A (fig. 72) $y = 0$, l'on aura $R = \frac{(aa)^{\frac{3}{2}}}{aa} = a$; mais a est ici le demi-paramètre; donc la même chose a lieu pour la parabole.

COROLLAIRE III. Si on suppose $x = \frac{1}{2}a$, l'on aura dans l'ellipse (fig. 73) $R = DM = \frac{a\sqrt{ap}}{2p}$; mais en faisant le petit axe $= b$, l'on

l'on a (voyez les sections coniques) $a : b :: b : p$, ou $bb = ap$ & $b = \sqrt{ap}$. Donc si on fait $2p : a :: b : DM$, le point M sera un point de la développée, & sera en même temps un point de rebroussement. Si on développoit l'ellipse entiere, la développée (fig. 75) auroit quatre branches égales.

106. PROBLÊME. *Trouver le rayon osculateur de la cycloïde A D a (fig. 76).* Faisant l'arc de cercle $DN = z$, l'on aura $PC = y = PN + z = \text{fin.}\, z + z$, & $dy = d.\text{fin.}\, z + dz$.

Supposant le rayon $= 1$, $DP = x$, l'on a par la nature du cercle, $PN = \sqrt{(2x - xx)}$; donc $d.PN = d.\text{fin.}\, z = d.\sqrt{(2x - xx)} = \frac{dx - xdx}{\sqrt{(2x - xx)}}$.

Mais (27) la différentielle du *finus* d'un arc dont le rayon $= 1$ est égal à la différentielle de l'arc, multipliée par le *cofinus* de l'arc, & ici le *cofinus* $RP = 1 - x$; donc la différentielle de *finus* z est $= dz.\,(1 - x)$, & $dz = \frac{d.\,\text{fin.}\, z}{1 - x} = \frac{(1 - x).\,dx}{(1 - x).\sqrt{(2x - xx)}} = \frac{dx}{\sqrt{(2x - xx)}}$; donc dy est $= \frac{(2 - x)\,dx}{\sqrt{x}.\sqrt{(2 - x)}} = \frac{dx.\sqrt{(2 - x)}}{\sqrt{x}} = \frac{dx}{x} \times \sqrt{(2x - xx)}$, & $ddy = \frac{-dx^2}{x.\sqrt{(2x - xx)}}$ (en supposant dx constant); donc $ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{2\,dx^2}{x}$, & $R = CQ = \frac{ds^3}{-dx\,ddy}$, en supposant dx constant, devient $= 2.\sqrt{2.(2 - x)}$; or la corde FN (voyez la Géométrie) est moyenne

proportionnelle entre le diamètre & la partie FP; donc CQ = 2. FN; mais, ſelon ce qu'on a dit ci-deſſus (13), DN eſt parallèle à la tangente Cm, & de plus NF eſt perpendiculaire à DN, tandis que CQ eſt perpendiculaire à Cm; donc FN = Cn = nQ; c'eſt-à-dire que prenant une ligne CQ parallèle à la corde FN & double de cette corde, le point Q ſera à la développée: cette courbe paſſe par le point A, auquel le rayon oſculateur eſt = o.

Pour déterminer la développée, je remarque que le rayon DM correſpondant au milieu de la cycloïde, doit être double du diamètre du cercle générateur; donc faiſant le rectangle ABab, le diamètre du demi-cercle ASB ſera = FD; & parce que Cn = nQ, les parallèles pf, PC ſeront également éloignées de Aa, les arcs AS, NF compris entre ces parallèles également éloignées, ſeront égaux, & leurs cordes ſeront auſſi égales; donc les angles AFN, nAS, formés par la tangente AF & ces cordes, ſeront égaux; ainſi AS ſera parallèle à nQ & à FN. De plus, on aura An = SQ; mais l'arc DN = CN = nF; donc An eſt égale à l'arc FN; donc l'arc NF = SQ; donc l'arc AS eſt égal à l'ordonnée correſpondante SQ, propriété diſtinctive de la cycloïde; & partant la courbe AQM eſt une demi-cycloïde.

COROLLAIRE. Donc 1°. la longueur de la demi-cycloïde eſt double du diamètre du cercle générateur, & la cycloïde entiere eſt quadruple du diamètre du cercle générateur. Donc 2°. la développée de la cycloïde eſt encore une cycloïde; mais dans une ſituation renverſée, & l'on voit que la développée a un point de rebrouſſement en M, &

qu'elle est formée de deux demi-cycloïdes égales chacune à la moitié de la cycloïde ADa (*).

107. PROBLÈME. *Déterminer le rayon osculateur de l'hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes.* Soit supposée $AB = BD = a$ (fig. 77), $AL = x$, $LC = y$; l'on aura $xy = aa$. Donc en prenant les différentielles, $xdy + ydx = 0$; & différenciant de nouveau en regardant dx comme constant, l'on aura $ddy = \frac{-2dxdy}{x}$. Substituant cette valeur dans la formule du côté $CN = \frac{-ds^2}{ddy}$, dans la même hypothèse, l'on trouvera $CN = \frac{xds^2}{2dxdy} = \frac{x(dx^2+dy^2)}{2dxdy}$. Mais l'équation $xdy + ydx = 0$

(*) La cycloïde étant une courbe qu'on rencontre assez souvent dans l'analyse, & dont l'équation peut se présenter sous différentes formes, nous croyons devoir parler de quelques-unes. Soit l'arc de cercle $DN = x$, le diamètre $DF = 2r$; l'ordonnée CP de la cycloïde étant $= PN + NC = x + \mathit{sin.}\,x$, l'on aura $PC = y = x + \mathit{sin.}\,x$. Mais en faisant $DP = x$, l'arc DN sera $= S.\frac{r.dx}{\sqrt{(2rx-xx)}}$, & l'on aura $PC = y = PN + NC = \sqrt{(2rx-xx)} + S.\frac{rdx}{\sqrt{(2rx-xx)}}$, & en prenant les différences, $dy = \frac{rdx - xdx}{\sqrt{(2r.x-xx)}} + \frac{rdx}{\sqrt{(2rx-xx)}} = \frac{(2r-x).dx}{\sqrt{(2rx-xx)}} = \frac{dx.\sqrt{(2r-x)}}{\sqrt{x}}$. Mais en comptant les abscisses du centre R du cercle générateur & faisant $RP = x$; à cause que $2r - x = FP$ est $= r + x$, & que $DP = r - x$, l'on a $dy = \frac{-dx\sqrt{(r+x)}}{\sqrt{(r-x)}}$. Si l'on fait $FP = x$, l'on aura $dy = \frac{-dx\sqrt{x}}{\sqrt{(2r-x)}}$.

donne $dy = \frac{-ydx}{x}$; donc $CN = \frac{x^2+y^2}{-2y}$; & puisque cette quantité est négative, il faut prendre CN du côté opposé à la ligne des abscisses. Menez AC & faites son prolongement $CE = \frac{AC}{2}$; menez-lui la perpendiculaire EN qui rencontrera LC (prolongée) en N, le côté CN sera par là déterminé. En effet les triangles semblables ACL, NCE donnent CL : CA :: CE : CN, ou $y : \sqrt{(xx+yy)} :: \frac{\sqrt{[xx+yy]}}{2} : CN = \frac{xx+yy}{2y}$, qui est la valeur qu'on a trouvée ci-dessus, en n'ayant pas égard au signe qui ne sert qu'à indiquer la position de CN.

Maintenant tirant CQ perpendiculaire à la courbe & NQ parallèle aux abscisses, le point Q, où ces lignes se rencontreront, sera un point de la développée. Pour avoir le point P de la développée, correspondant au point D sommet de la courbe, on remarquera que AD est normale à la courbe; donc prenant $DK = \frac{AD}{2}$, menant KH perpendiculaire à DK & HP parallèle aux abscisses, le point P où cette ligne rencontre le prolongement de AD, sera le point cherché. Il est évident que PD est = AD, & que HD = BD.

108. PROBLÈME. *Déterminer le rayon de la spirale logarithmique* (*fig.* 78). Soit F le foyer, par la propriété de cette courbe (30), l'angle FDT que fait le rayon avec la tangente, est toujours constant. Donc en faisant l'arc Dm décrit du foyer avec le rayon variable DF (y) = dx, le *sinus* de l'angle $DCm = a$, son *cosinus* = b, l'on aura (à cause du triangle rectangle DmC), l'on aura, dis-je,

$Dm = dx : Cm = dy :: a : b$; donc $dx = \frac{ady}{b}$ (*).

Je prends la formule du rayon $R = \frac{ydy}{dp}$, p étant $= \frac{ydx}{ds}$; mais le triangle rectangle DCm donne (en sup-

(*) dx est un arc décrit avec rayon variable, au lieu qu'on a supposé ci-dessus (30) que le rayon de l'arc dx étoit constant.

posant le rayon $= r$), $ds : r :: dy : b$. Ainsi $ds = \frac{rdy}{b}$; donc $p = \frac{ya}{r}$, & $dp = \frac{ady}{r}$; donc $R = \frac{ry}{a}$. Pour construire R; du point F, menez FQ perpendiculaire à DF jusqu'à la rencontre de la normale DQ, le point Q sera à la développée: car on aura $a : r :: y : DQ = \frac{ry}{a}$. Puisque l'angle QDT est droit, il sera égal aux deux angles DQF + QDF, qui valent un angle droit, parce que le triangle DFQ est rectangle; donc en retranchant l'angle commun QDF, l'on aura DQF = FDT. Ainsi la ligne FQ fera toujours avec le rayon osculateur un angle égal à celui que fait le rayon de la courbe avec sa tangente, je fais cet angle $= c$. Mais le rayon osculateur QD est tangente de la développée; donc les lignes qui partent du point F font avec la développée un angle constant c; donc la développée est elle-même une spirale logarithmique égale à la développante ou à la courbe de développement, & l'arc FQ de la développée est égal au rayon DQ, quoique cette courbe fasse une infinité de révolutions avant d'arriver au foyer F.

REMARQUE. Si l'on prend un rayon FP = FQ & que l'on conçoive que la spirale logarithmique tourne sur le point F jusqu'à ce que le rayon FP, après avoir décrit l'angle PFQ, se confonde avec FQ, on aura la position de la développée.

Il suit de ce qu'on vient de dire, que la spirale logarithmique produit, en se développant, une autre spirale logarithmique située dans une position droite.

109. PROBLÈME. *Déterminer le rayon osculateur de la spirale dont l'équation est* $dx = \frac{dy\sqrt{[yy - bb]}}{b}$. L'on aura $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{ydy}{b}$. Je me sers de la formule qui ne suppose aucune différentielle constante & prenant la différentielle de dx, j'ai $ddx = \frac{ydy^2}{b\sqrt{[yy - bb]}} + \frac{ddy\sqrt{[yy - bb]}}{b}$. Substituant ces valeurs de ds, dx, ddx dans la formule ci-dessus pour les courbes dont le ordonnées partent d'un point, l'on a $R =$

$$\frac{yds^3}{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy} = \sqrt{(yy - bb)}.$$

Soit B C D M (fig. 79) la courbe cherchée, qu'on mene la perpendiculaire C Q à la courbe & du foyer F la ligne F Q perpendiculaire à C Q ; que du point F avec le rayon F C, on décrive l'arc $Cm = dx$. Si des angles droits Q C D, F C m on retranche l'angle Q C m, l'on aura mC D = F C Q ; donc les triangles m C D, F C Q sont semblables ; donc $CD = ds : Dm = dy :: FC = y : FQ$; donc $ds = \frac{ydy}{FQ}$. Mais nous avons trouvé $ds = \frac{ydy}{b}$; donc $FQ = b$; ainsi les perpendiculaires tirées du foyer F sur les rayons osculateurs, sont constantes & $= b$. Du point F avec le rayon $FQ = b$, décrivez un cercle, les centres de tous les rayons osculateurs seront situés sur la circonférence de ce cercle ; car on aura toujours $R = CQ = \sqrt{(FC)^2 - (QF)^2} = \sqrt{(yy - bb)}$; c'est pourquoi la développée de la courbe proposée est un cercle.

110. PROBLÈME. *Trouver le rayon osculateur de la logarithmique* M X (*fig.* 80). Soit l'abscisse $AP = x$, l'ordonnée $PC = y$, la sous-tangente de cette courbe étant constante, si on la suppose $= a$, l'on aura (21) $\frac{ydx}{dy} = a$, ou $dy = \frac{ydx}{a}$, $dy^2 = \frac{yydx^2}{aa}$; & supposant dx constant, il viendra $ddy = \frac{dydx}{a} = \frac{ydx^2}{aa}$; donc en substituant les valeurs de dy^2 & de ddy dans la formule $\frac{-ds^3}{dxddy}$, l'on aura $R = \frac{(aa + y^2)\sqrt{(aa + yy)}}{-ay}$. Cette valeur étant négative, l'on prendra $R = CQ$ du côté opposé à l'axe. La logarithmique a un point de plus grande courbure, auquel répond le plus petit rayon. Pour trouver ce point, on cherchera le point Q, auquel la développée a un point de rebroussement, en faisant la différence de $R = 0$: ce qui donnera $a^2 = 2y^2$, ou $y^2 = \frac{a^2}{2}$, & $y = a\sqrt{\frac{1}{2}}$ (*) ; donc si on prend $PC = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, l'on aura le point C, auquel répond le plus petit rayon osculateur ; de

(*) Les commençans pourront s'exercer à faire le calcul, qui n'est pas difficile.

maniere que la courbe Q B sera la développée de la partie C N, la courbe Q b étant la développée de la partie C M. Si sur le diamètre PT $= a$, on décrit un demi-cercle P m T, & qu'on prenne m T $= m$ P, le triangle rectangle P m T donnera $(PT)^2 = aa = (mP)^2 + (Tm)^2 = 2.(Pm)^2$, & $Pm = a\sqrt{\frac{1}{2}}$; donc en supposant l'ordonnée P C $=$ P m, le point C sera le point cherché.

III. PROBLÊME. *Trouver le rayon osculateur de la tractrice (fig. 81).* Dans cette courbe (dont nous parlerons dans le calcul intégral), la tangente est constante (34), je la fais $= a$. Par les points infiniment proches C & D, je mene les perpendiculaires à la courbe C Q, D Q, qui se rencontrent en Q; il s'agit de déterminer C Q $=$ R. Qu'on mene les tangentes C T, D t; en prolongeant cette derniere tangente elle rencontrera la premiere en h. Du point h, comme centre avec le rayon ht, je décris l'arc tf, qui coupe en f le prolongement de C T. Puisque la tangente de la tractrice est constante, l'on a C T $=$ D t. Donc C T $+ h$D $= ht = hf$. Ainsi en retranchant de part & d'autre la quantité hT, l'on aura C$h +$ Dh $=$ Tf; mais l'arc CD étant infiniment petit, l'on a Ch + Dh $=$ CD; donc CD $=$ Tf. Puisque (selon ce que nous avons dit ci-dessus), l'angle C Q D est $= thf$, les secteurs Q C D, fht sont semblables, & l'on a C Q : ht $=$ C T (car ces quantités ne peuvent différer qu'infiniment peu) :: CD $=$ Tf : tf; donc ayant mené Q T, les triangles rectangles Q C T, f Tt ayant les côtés qui comprennent l'angle droit proportionnels, seront semblables, & l'angle C Q T sera $= t$Tf; mais les angles C Q T, C T Q valent un angle droit; donc tTf ou C T P avec Q T C valent aussi un angle droit; donc l'angle Q T P est droit, & Q T est perpendiculaire à l'axe B T; donc pour déterminer

le rayon osculateur correspondant au point C, l'on menera CQ perpendiculaire & CT tangente à la courbe, & du point T où la tangente rencontre l'axe, une perpendiculaire à cet axe, qui rencontrera la normale CQ au point Q, centre du cercle osculateur.

Pour déterminer sa développée, je prolonge QC jusqu'à la rencontre de l'axe en m, & je mene l'ordonnée CP. Je fais BT (le point B répond à l'origine de la courbe, auquel point l'on a AB $=$ CT $= a$) $= p$, TQ $= q$, l'on a $\overline{CQ}^2 = \overline{QT}^2 - \overline{CT}^2$, ou CQ $= \sqrt{(qq - aa)}$. Puisque CQ est tangente en Q de la développée AQ, Tm sera une sous-tangente, & par conséquent $= \frac{q\,dp}{dq}$ (*). De plus les triangles semblables donnent QT : Tm :: CP : Pm :: PT : CP. Mais les triangles CTP, QTC étant semblables au triangle tTf, sont semblables entr'eux; donc PT : PC :: CQ : CT; donc QT : Tm :: QC : CT, ou $q : \frac{q\,dp}{dq} :: \sqrt{(qq - aa)} : a$; d'où l'on tire $dp = \frac{a\,dq}{\sqrt{(qq - aa)}}$, équation de la courbe des *cosinus* hyperboliques. Nous en parlerons ailleurs.

REMARQUE. Soit z une fonction quelconque de x & de y, ds l'élément de l'arc d'une courbe dans laquelle $dx = z\,dy$. On sait que le rayon osculateur est $= \frac{ds^3}{dy\,ddx}$, en supposant dy constant;

(*) Cette formule devient $\frac{y\,dx}{dy}$, en faisant $q = y$ & $p = x$.

& puisque $dx = z\,dy$, le rayon osculateur sera $\frac{ds^3}{dy^2\,dz}$; car alors $ddx = dz\,dy$ (en supposant toujours dy constant), d'où l'on peut tirer cette construction générale pour une courbe algébrique ou transcendente quelconque.

Soit la courbe AC (fig. 81.A), dont on demande le rayon de courbure au point C, tirez les lignes qu'on voit dans la figure; c'est-à-dire, après avoir mené la tangente au point C, par le point f où cette tangente rencontre l'axe fD, élevez la perpendiculaire fg jusqu'à la rencontre de la normale (à la courbe) prolongée en g; & parce qu'on est supposé connoître la tangente, sous-tangente, la normale & sous-normale de cette courbe, construisez une nouvelle courbe mL; de maniere que son ordonnée mb soit quatriéme proportionnelle à l'ordonnée bC de la premiere, à la sous-tangente fb & à une constante n, prise arbitrairement, pour avoir $bC = y : bf = \frac{y\,dx}{dy} :: n : bm = \frac{n\,dx}{dy}$, ce qui donne $d.\,bm = \frac{n\,ddx}{dy} = \frac{n\,dz\,dy}{dy} = n\,dz$, en supposant dy constant. On connoîtra donc cette nouvelle courbe & ses tangentes, sous-tangentes, &c. Faites $fb : Nb :: g\mathrm{D} : \mathrm{CF}$, je dis que CF sera le rayon cherché. Car par construction, $\mathrm{CF} = \frac{Nb \times g\mathrm{D}}{fb} = \frac{Nb.\mathrm{C}f.\mathrm{D}f}{fb.\mathrm{C}b}$, à cause des triangles semblables $g\mathrm{D}f$, $f\mathrm{C}b$. Mais à cause des triangles semblables DfC, Cfb,

Cfb, l'on a $\frac{Nb.Cf.Df}{fb.Cb} = \frac{Nb\times(Cf)^3}{(fb)^2\times Cb} = \frac{Nb\times(Cf)^3\times n}{fb\times(Cb)^2\times bm}$ (par construction) $= \frac{dx.ds.ds^2,n}{n.dz.dx.dy^2}$ (par la propriété des tangentes; car $\frac{Nb}{bm} = \frac{dx}{ndz}$ (*), $\frac{Cf}{fb} = \frac{ds}{dx}$, & $\frac{Cf}{Cb} = \frac{ds}{dy}$) $= \frac{ds^3}{dz\,dy^2}$ (en divisant le numérateur & le dénominateur par $n\,dx$) = au rayon osculateur; donc CF est le rayon osculateur.

Soit aC la logarithmique vulgaire (fig. 81 B); Lm sera aussi une logarithmique semblable qui aura la même sous-tangente, mais dans une situation renversée & sur le même axe, de sorte que bn sera $=fb$. Car soit $bC=y$, $bf=a$, l'on aura $bm = \frac{a.n}{y}$, & de même $y = \frac{a.n}{bm}$; ainsi les courbes Lm, aC sont les mêmes, mais placées dans une situation renversée, de maniere que la plus grande ordonnée y répond à la plus petite ordonnée bm. De-là il suit que le rayon osculateur de la logarithmique aC est $= gD$; ainsi l'on a $FC = gD$.

112. PROBLÊME. *Déterminer la nature de la développée d'une demi-épicycloïde AMR (fig. 82) décrite par la révolution d'un demi-cercle MCB autour*

(*) Car les triangles semblables mhr, mbN donnent $Nb : bm :: hr : hm$, ou $\frac{Nb}{bm} = \frac{hr}{hm}$. Mais $hr = dx$ & $hm = ndz$; donc &c.

d'un cercle immobile BCR (*). Lorſque le demi-cercle générateur eſt parvenu dans la poſition BCM, c'eſt-à-dire, lorſque le point décrivant A eſt arrivé en M, il eſt viſible 1° que tous les points de l'arc BSC du cercle mobile ſe ſont appliqués ſucceſſivement ſur l'arc CB du cercle immobile, & qu'ainſi ces deux arcs ſont égaux; 2° que MC eſt perpendiculaire ſur la courbe, puiſque la corde MC eſt évidemment ſituée ſur le rayon M*p* de l'arc évanouiſſant *m*M, décrit par le point M; 3° ſi du centre Q du cercle immobile l'on décrit l'arc EM, les arcs EB, MC du cercle mobile compris entre deux arcs concentriques, ſont égaux (à cauſe de la courbure uniforme du cercle), auſſi bien que leurs cordes; & les triangles QBE, QMC ayant tous leurs côtés égaux, ſont égaux en tout. Donc les angles QBE, QCM ſont égaux. Soit maintenant du centre *p*, où ſe rencontrent deux perpendiculaires à la courbe infiniment proches, décrit l'arc C*h*, & conſidérons E*i* perpendiculaire ſur EB comme un arc infiniment petit, décrit du point B avec la corde EB priſe pour rayon; les triangles rectangles C*hc*, E*ie* ſeront égaux & ſemblables; car C*c* ou R*c* — RC = E*e*, où eſt égal à l'arc B*e* — l'arc BE, puiſque les arcs BE, MC, compris entre des arcs concentriques ſont égaux, & que l'arc RC eſt égal à l'arc MC; & ſi le point M ſe trouvoit en *m*, l'on auroit l'arc R*c* égal à l'arc correſpondant MS; donc R*c* = BE*e* & C*c* = E*e*; d'ailleurs *hc* = *mc* — MC = B*e*,

(*) Quand on parle d'une figure, il n'eſt pas néceſſaire qu'elle ſoit entierement décrite; il ſuffit que la portion décrite ſoit ſuffiſante pour faire comprendre ce dont il s'agit

— BE ; puisque mc est censée égale à la corde du cercle dont l'extrémité c appuyoit sur le cercle immobile, lorsque le point décrivant étoit en m ; donc on avoit alors $Be = mc$; donc $hc = Be - BE = ie$. Les triangles eiE, hCc ont donc leurs hypothénuses & un côté égaux de part & d'autre ; ainsi le troisiéme côté hC d'un des triangles est égal au troisiéme côté Ei de l'autre triangle (*). On vient de voir que les arcs Ei, hC sont égaux ; mais les angles mesurés par des arcs égaux sont en raison inverse des rayons de ces angles [voyez ce qu'on a dit ci-dessus 101] (**); donc l'angle $Cph : EBi :: BE : pC$.

Pour trouver le rapport de ces angles, je fais le rayon du cercle immobile $= b$, le rayon BK du cercle mobile $= a$. Il est évident que l'angle $EBe = QBe - QBE = Qcm - QCM$ (***); donc en menant uC parallèle à Qc & CL parallèle à cm, l'on aura $EBe = LCu - QCM = LCM - QCu$ (parce que les angles LCu, mcQ, dont les côtés sont parallèles, sont égaux, & qu'en retranchant du premier de ces angles l'angle $MCQ = MCu + QCu$, il reste $LCM - QCu$). Mais $LCM = mpM$; donc $mpM - QCu = EBe$, ou $mpM = EBe$

(*) Car ces deux côtés sont égaux chacun à la racine de la différence du quarré de l'hypothénuse & de celui de l'autre côté.

(**) Car si deux arcs sont égaux & que le rayon du premier soit double de celui de l'autre, le premier mesurera un angle sous-double.

(***) Car puisque Me est égale à la corde Be, les triangles Qmc, QBe ont tous leurs côtés égaux, & par conséquent leurs angles sont aussi égaux. Il en est de même des triangles QCM, QEB.

$+$ QCu. D'autre côté les arcs Ee, cC sont égaux; donc l'angle CQc: eKE$=2$. EBe (parce que celui-ci a son sommet à la circonférence du cercle; ainsi il n'est que la moitié de l'angle EKe) :: KE $= a$: QC $= b$; donc l'angle CQc $= \frac{2a . EBe}{b}$; & l'angle MCL est $=$ Cph $=$ EBe $+$ QCu $=$ EBe $+$ CQc (parce que les angles uCQ, CQc sont alternes, internes) $= \frac{b}{b} \times$ EBe $+ \frac{2a}{b} \times$ EBe $= \frac{(2a+b).EBe}{b}$. Mais il est évident que Cp: BE :: EBe : $\frac{(2a+b)\,EBe}{b}$; donc Cp $= \frac{b.BE}{2a+b} = \frac{b.MC}{2a+b}$. Maintenant si l'on fait QA (fig. 83) $= (b + 2a)$: QB $= b$ :: MC : Cp, le point p sera à la développée [car (fig. 82) le point p est le concours des deux perpendiculaires infiniment proches mp, Mp].

De la derniere proportion, en la renversant, composant & faisant Mp $=$ R, l'on déduit R : MC :: $2b + 2a : b + 2a$; cette développée (fig. 83) commence au point R de la base auquel l'arc MC devient $= 0$, ou, si l'on veut, $= \frac{1}{\infty}$, & elle se termine au point N; de sorte que QA : QB :: BA : BN, ou QA : AB :: QB : BN :: QA — AB $=$ QB : QB — BN $=$ QN, ou QA : QB :: QB : QN (*); donc les lignes QN, QB, QA sont en proportion continue. Maintenant si du centre Q, l'on décrit le cercle Ntm, je dis que la développée RpN sera

(*) On doit faire attention qu'au point B, l'on a MC $=$ BA, & Cp $=$ BN.

une demi-épicycloïde semblable à la proposée; parce que les diamêtres NB, AB des cercles mobiles sont dans le rapport des rayons QN, QB des cercles immobiles, mais elle est posée dans une situation renversée, de maniere que l'une touche sa base en R & l'autre en N. Supposons la ligne QD = QA, *t*C = BN, & décrivons les cercles DMC, *tp*C, la droite QD passera par les points *t* & C, auxquels les cercles mobiles touchent les immobiles; & faisant AB ou DC : NB ou C*t* :: MC : C*p*, le point *p* sera à la développée, & de plus à la circonférence du cercle C*pt*. En effet l'angle DMC, appuyé sur le diamêtre DC, est droit, & les triangles DCM, C*tp* ayant les côtés qui comprennent l'angle C proportionnels, sont semblables; donc l'angle C*pt* est droit; mais cet angle est appuyé sur le diamêtre C*t*; donc il est à la circonférence. De plus à cause des angles MCD, *t*C*p* égaux, l'arc DM ou son égal CB, est à l'arc *pt*, comme le diamêtre CD au diamêtre C*t* (car les arcs semblables sont comme les rayons & les diamêtres) :: QC : Q*t* :: CB : N*t*; donc les arcs N*t*, *pt* sont égaux; donc la courbe N*p*R est formée par le mouvement d'un point *p* de la circonférence d'un cercle C*pt*, qui roule sur le cercle immobile N*tm*; & partant cette courbe est une épicycloïde.

COROLLAIRE. La courbe R*p*N, en se développant produit donc une demi-épicycloïde RMA, & l'arc développé R*p* étant égal au rayon osculateur M*p*, l'on a M*p*=R*p*. Mais selon ce qu'on a dit ci-dessus AB : NB :: MC : C*p*, & QB : QN :: AB : BN; donc C*p* : C*p*+CM=*p*M=R*p* :: NQ : QB+QN; c'est-à-dire, que la tangente *p*C, comprise entre la demi-épicycloïde NR & le cercle

N 3

BR, eſt à la longueur de la développée Rp, comme le rayon du cercle immobile de la développée, à la ſomme des rayons des deux cercles immobiles; ou en ne faiſant attention qu'à l'épicycloïde N R, comme le rayon du cercle immobile à la ſomme des diamétres des cercles mobile & immobile; car Q B + QN = 2 QN + N B. Donc en faiſant l'arc Rp = S, la tangente pC = n, Q N = b, N B = $2a$, l'on aura $n : S :: b : 2a + 2b$.

Au point B, l'on a n = BN = $2a$; & Mp = N A = S = $\frac{2a.(2a+2b)}{b}$; donc ſi $a = b$, l'on a alors S = RN = $\frac{8aa}{a} = 8a = 8b$; c'eſt-à-dire, que la demi-épicycloïde NR eſt alors égale à quatre diamêtres du cercle mobile ou de l'immobile. Par la même raiſon, ſi on fait AB = $2a$ & QB = b, l'on aura la longueur S de l'arc R A = $\frac{2a.(2a+2b)}{b}$.

Poür trouver l'eſpace renfermé entre la demi-épicycloïde ou la demi-roulette AMR (fig. 82) & le cercle immobile BR, je remarque que le trapeze M C hm eſt = $\frac{1}{2}$ M C. (mM + Ch) (voyez la Géom.). Or Cp = ($\frac{b}{2a+b}$ × MC): Mp = [$\frac{2a+2b}{2a+b}$ × MC (*)] :: Ch : Mm =

(*) Car Mp = Cp + CM = $\frac{b}{2a+b}$ × CM + CM = $\frac{(b+2a+b).CM}{2a+b} = \frac{(2a+2b).CM}{2a+b}$.

$\frac{(2a+2b).}{b}$ Ch; donc à cause de $Ch = Ei$ (ainsi qu'on l'a vu ci-dessus), & de $MC = EB$, l'on aura le trapeze $MChm = \frac{(2a+3b)}{2b} \times Ei \times EB$; donc le trapeze sera au triangle correspondant EBi ou EBe (car ces triangles ne différent entr'eux que d'une quantité infiniment petite par rapport à eux-mêmes) comme $2a + 3b : b$. Mais le triangle $EBe = \frac{1}{2}.\ Bi.\ Ei$ est l'élément du demi-cercle mobile, & le trapeze dont on vient de parler est l'élément de l'espace épicycloïdal cherché; donc cet espace est égal au demi-cercle mobile, multiplié par $\frac{2a+3b}{b}$. Si $a = b$, cet espace sera égal au demi-cercle mobile, que je fais $= g$, multiplié par 5, ou sera $= 5g$, & l'espace entier renfermé entre l'épicycloïde & le cercle immobile, sera $= 10\,g$ ou quintuple du cercle générateur.

Si on suppose $b = \infty$, c'est-à-dire, si on suppose le cercle immobile infini & le cercle mobile fini, alors la base de l'épicycloïde ne différant qu'infiniment peu d'une ligne droite, l'épicycloïde se change en cycloïde, qui peut être regardée comme une épicycloïde dont le rayon du cercle immobile seroit infini, & dans ce cas l'espace dont nous venons de parler devient $= \frac{3b}{b}.g = 3g$, l'espace cycloïdal entier est $= 6\,g$ ou égal au triple du cercle générateur, & l'arc RN (fig. 83) $= S$, qu'on a trouvé ci-dessus $= \frac{2a.(2a+2b)}{b}$

devient alors $= \frac{4ab}{b} = 4a$ [car alors $2(2a + 2b)$ devient $= 4b$] ; donc la cycloïde entiere sera $= 8a$, ou sera quadruple du diamêtre du cercle générateur.

Si l'on suppose que le cercle mobile BEA (fig. 84) roule au dedans de l'immobile, alors on doit regarder le diamêtre $2a$ comme négatif; & ayant mené la perpendiculaire Mp à la roulette RA, l'on fera QA $= b - 2a$ (à cause du diamêtre $2a$ négatif) : QB $= b$ :: MC : Cp $= n$, & le point p sera à le développée ; donc $n =$ Cp : MC + Cp = Mp = Rp = S :: $b : 2b - 2a$, ou S $= \frac{n.(2b - 2a)}{b}$. Mais QA, QB, QN sont en proportion continue ; donc $b - 2a : b :: b :$ QN $= \frac{bb}{b-2a}$, & AN $= \frac{bb}{b-2a} - b + 2a = \frac{4ab - 4aa}{b-2a} =$ RN.

L'on a vu ci-dessus que mM $= \frac{(2a+2b).Ch}{b}$, & que Ch = Ei (fig. 82). Or Ei est l'élément de la corde EA, & mM l'élément de l'arc cycloïdal Am ; donc cet arc est égal à $\frac{(2a+2b)}{b}$. EA. Mais dans la figure 84, à cause de $2a$ négatif, l'on a AM $= \frac{(2b-2a).EA)}{b}$ (EM est un arc de cercle décrit du centre Q) ; donc l'arc RA $= \frac{(2b-2a)}{b} \times$ AB, parce qu'ici AE = AB ; & l'épicycloïde entiere RAD est double de cet

arc. L'élément $mMCh = \frac{(3b-2a)}{b} \times \frac{1}{2}BE \times$ iE, & l'espace BRAM $= \frac{(3b-2a).g}{b}$, en faisant l'aire du demi-cercle BEA $= g$.

REMARQUE I. L'on a pris le trapeze $mChM$ pour l'élément de l'espace BRMA, au lieu de prendre le quadrilatère Mmc C; mais il faut remarquer que le triangle Chc est infiniment petit par rapport au trapeze dont nous venons de parler. En effet les côtés Ch, ch sont infiniment petits par rapport à CM & ch. Ch est un infiniment petit du second ordre; donc on peut le négliger devant $MCcm$ infiniment petit du premier ordre.

REMARQUE II. On peut conclure de ce que nous venons de dire, que les développées des épicycloïdes sont aussi des épicycloïdes, & réciproquement qu'une demi-épicycloïde, en se développant, produit une demi-épicycloïde, mais dans une situation renversée. On suppose que ce développement commence au milieu de l'épicycloïde.

113. PROBLÈME. *Trouver la courbe de l'équation* $S = \frac{n}{m}\sqrt{(CC-RR)}$, *S étant un arc de courbe, C une ligne donnée, & R le rayon osculateur de la courbe. Soit AM un arc d'épicycloïde t, le rayon osculateur correspondant au point* $M = Mp = R$ (*fig.* 85), & supposons que AD $=$ C est le rayon osculateur correspondant au point A de la courbe. Je divise AD en deux parties en B, de sorte que lon ait C : AB :: $n+m : n$, ou AB $= \frac{nC}{n+m}$; donc BD $= C - \frac{n.C}{n+m} = \frac{mC}{n+m}$. Je fais encore $n-m : m :: \frac{nC}{n+m} =$ AB: BQ $= \frac{nmC}{nn-mm}$. Du point Q avec les rayons QB & QA,

je décris les cercles AF, BC, & sur le diamêtre AB, je décris le cercle AEB. Faisant mouvoir ce dernier cercle sur le cercle immobile BCN, le point A, qui au commencement du mouvement est le plus éloigné du centre Q, décrira l'arc AM d'une épicycloïde. Supposons que ce cercle soit parvenu en FMC, & tirons par le centre de ce cercle la ligne $FQ = AQ$; tirons encore les cordes FM tangente de l'épicycloïde, & MC perpendiculaire à l'épicycloïde. Selon ce qu'on a démontré (112) la tangente Cp (fig. 83) comprise entre le cercle immobile & l'épicycloïde, est à l'arc Rp comme le rayon QR du cercle immobile à la somme des diamêtres des cercles mobile & immobile; donc (fig. 85) la tangente MF est à l'arc $AM = S :: CQ = \frac{nmC}{nn - mm}$: $AB + BN = \frac{nC}{n+m} + \frac{2nmC}{nn-mm} :: m : n+m$; donc la corde MF est $= \frac{mS}{n+m}$. L'on a trouvé aussi (112) pour la figure 83 la proportion R (c'est le rayon osculateur) : MC :: $2b + 2a : b + 2a$ (b est le rayon du cercle immobile, a celui du cercle mobile, & MC la corde du cercle mobile, comprise entre le point décrivant du cercle mobile & le point où ce cercle touche l'immobile); donc (fig. 85) R : $CM :: AB + 2BQ : AB + BQ :: \frac{nC}{n+m} + \frac{2nmC}{nn-mm}$: $\frac{nC}{n+m} + \frac{nmC}{nn-mm} :: m+n : n$; donc $MC = \frac{nR}{n+m}$; or $(FC)^2 = (AB)^2 = (MF)^2 + (MC)^2$; donc $\frac{n^2C^2}{(n+m)^2} = \frac{m^2S^2}{(n+m)^2} + \frac{n^2R^2}{(n+m)^2}$; d'où l'on tire $S = \frac{n}{m} \cdot \sqrt{(C^2 - R^2)}$, équation qui résout le problême.

Si $m = 0$, l'on a $AB = \frac{nC}{n+m} = \frac{nC}{n} = C$; les points B & D se confondent, DB s'évanouit, le rayon BQ du cercle immobile devient $= 0$, ce cercle devient un point Q, & l'on n'a alors aucune épicycloïde. Si $n = m$, l'on a $AB =$

$\frac{nC}{n+m} = \frac{C}{2}$, & $BQ = \frac{nmC}{nn-mm} = \infty$. Ainsi la base de l'épicycloïde peut alors être regardée comme une ligne droite, & l'on a une cycloïde à laquelle convient l'équation $S = \sqrt{(CC-RR)}$.

Supposons maintenant $m > n$; je fais $AD = C$ (fig. 86), & prenant $AB = \frac{nC}{m+n}$, $BQ = \frac{mnC}{mm-nn}$, je décris les cercles AFn, AEB, NCB. Supposons que le cercle mobile, en roulant au dedans de BCN, est parvenu dans la situation FMC, & que l'épicycloïde cherchée est AM. Ayant tiré $Mp = R$ & les autres lignes que la figure représente, à cause que le diamètre AB doit être pris négativement, on aura $MF : AM = S :: QB = \frac{nmC}{m^2-n^2} : BN - AB = \frac{2nmC}{m^2-n^2} - \frac{nC}{m+n} :: m : m+n$; donc $MF = \frac{mS}{m+n}$. L'on aura aussi $Mp = R : CM :: BN - AB : BQ - AB :: \frac{2mnC}{m^2-n^2} - \frac{nC}{m+n} : \frac{mnC}{m^2-n^2} - \frac{nC}{m+n} :: m+n : n$; donc $CM = \frac{nR}{m+n}$. Mais $(FC)^2 = (AB)^2 = (MC)^2 + (MF)^2$; donc $\frac{n^2C^2}{(m+n)^2} = \frac{mmSS}{(m+n)^2} + \frac{n^2R^2}{(m+n)^2}$, d'où l'on tire aussi $S = \frac{n}{m}\sqrt{(CC-RR)}$.

COROLLAIRE. Donc on peut toujours trouver une épicycloïde à laquelle convienne l'équation $S = \frac{n}{m}\sqrt{(CC-RR)}$.

114. PROBLÈME. *Trouver une courbe telle que la développée lui soit semblable.* Selon ce qu'on a dit ci-dessus (112), la développée d'une épicycloïde est aussi une épicycloïde semblable, mais située dans une position renversée, & l'on a vu aussi (108) que la développée de la spirale logarithmique étoit une spirale logarithmique, mais située dans une position droite. Si l'épicycloïde étoit une cycloïde, la développée seroit une courbe non-seulement semblable, mais égale. On sent bien qu'il faut que le développement se fasse comme cy-dessus (106), en commençant par le milieu de

la courbe, autrement cela n'auroit pas lieu. Si l'angle de la courbe avec son rayon étoit de 45° dans la logarithmique spirale (fig. 78), alors on auroit par-tout FQ=FD, & l'arc FQ de la développée égal à l'arc correspondant FD de la développante (*).

REMARQUE. Si la courbe AD (fig. 87) se développe en commençant par le point A, elle produira la courbe AB; si elle se développe à commencer par le point C, elle produira la courbe CN bien différente de la courbe AB, & la partie AC, en se dévelopant, à commencer par le point C, produira CM.

Des caustiques par réflexion & par réfraction.

115. Avant d'entrer en matiere, nous allons proposer un lemme dont nous ferons usage dans la suite.

LEMME. *Si l'on a un nombre quelconque de quantités* a, b, c, e, *& qu'on retranche la seconde de la premiere, la troisiéme de la seconde, &c. la somme* $a-b+b-c+c-e$ *de leurs différences sera* $=a-e$, *ou sera égale à la différence de la plus grande à la plus petite, & par conséquent égale à la plus grande, si la derniere est* $=0$.

Ce lemme est évident, car toutes les quantités intermédiaires se détruisent par la contrariété des signes; donc &c.

116. Si un rayon de lumiere AB, partant du point A (fig. 88) tombe sur une surface plane, pb ou sur une surface courbe QBD, & qu'il se réfléchisse en C, de maniere que le rayon incident soit AB & le rayon réfléchi BC, l'angle ABM fait par le rayon incident & la ligne BM perpendiculaire à la surface réfléchissante, sera appellé

(*) Cette propriété qu'a la spirale logarithmique & les épicycloides de produire des courbes semblables en se développant, est très-digne de remarque.

angle d'incidence, l'angle MBC, formé par la perpendiculaire MB & le rayon réfléchi BC, sera appellé *angle de réflexion*.

C'est un fait que l'angle de réflexion est toujours égal à l'angle incidence; or l'angle ABM est complément de l'angle ABp = ABQ; car l'angle pBQ est infiniment petit, & l'angle MBC est complément de l'angle CBb = CBD; donc les angles que forment les rayons réfléchi & incident, avec la surface réfléchissante, sont égaux entr'eux.

Si on conçoit qu'une infinité de rayons de lumiere FA, FM, &c. qui partant du point F, se réfléchissent après avoir rencontré la courbe AB (fig. 89), en faisant l'angle de réflexion égal a celui d'incidence, la courbe bQ que touchent les rayons réfléchis, ou la courbe bR (fig. 90), que touchent les prolongemens des rayons réfléchis, est appellée *caustique par réflexion*.

Si on fait la tangente AL = AF (fig. 89), & qu'on développe ensuite la ligne AQb, en concevant un fil égal à la courbe bQ, plus à la ligne AR = L (rayon réfléchi correspondant au point A) le point L décrira la courbe LP, telle que la tangente PQ de la caustique, sera toujours égale à la portion AQ de la caustique plus à la ligne AL. (Si AR est une ligne droite, on pourra néanmoins le considérer comme ayant une courbure infiniment petite, & comme une partie de la courbe bQ). Si on conçoit les rayons incidens infiniment proches FM, Fm & les rayons réfléchis correspondans MQ, mQ, prolongés jusqu'à la rencontre de la ligne LP, & que des points F & Q comme centres, l'on décrive les arcs MN, Mn, on aura les triangles rectangles

MN*m*, M*nm* semblables & egaux; car puisque l'angle de réflexion est égal à celui d'incidence, l'on a N*m*M = Q*m*B; or Q*m*B = M*mn* (son opposé ou sommet); donc ces deux triangles sont semblables, & parce que d'ailleurs ils ont la même hypothénuse, ils sont égaux; donc N*m* = *mn*. Mais *nm* est la différence de PM, & *m*N celle de FM; & parce que cela a lieu en quelque endroit de la courbe que soit situé le point M, il s'ensuit que MP — LA, ou AR + RQ — MQ, somme de toutes les différences N*m* dans la portion de courbe AM (voyez le lemme ci-dessus), est = FM — FA, somme de toutes les différences N*m* dans la portion de courbe AM; donc l'on a l'équation AR + RQ — MQ = FM — FA; donc l'arc RQ (de la caustique) est = FM — FA + MQ — AR; c'est-à-dire que l'arc RQ de la caustique est égal à la différence des rayons incidens de l'arc correspondant AM, plus la différence de tous les rayons réfléchis; car on doit regader AR comme le rayon réfléchi correspondant au point A; lorsque la caustique commence en A, le rayon est = 0. Si le rayon réfléchi AR (fig. 90) devoit envelopper la portion RQ de la caustique pour parvenir en MQ, dans ce cas on auroit RQ = FM — FA + AR — MQ, parce qu'alors la différence des rayons réfléchis est = RQ + QM — AR. En général la différence des rayons incidens est égale à la différence des rayons réfléchis, en joignant à l'un de ces derniers la portion de la caustique qu'il développe avant de tomber sur l'autre. Si du point F (fig. 89 & 90), l'on décrit l'arc A*a*, il est évident que *a*M fera la différence des rayons incidens; & si l'on suppose (fig. 91) que le point lumineux F devienne infiniment éloi-

gné, les rayons incidens seront censés parallèles, & l'arc Aa pourra être regardé comme une ligne droite perpendiculaire à ces rayons.

Il est visible qu'en cherchant le concours des rayons infiniment proches M Q, m Q (fig. 89), on trouvera le point Q de la caustique.

117. PROBLÊME. *Etant donné un point M d'une courbe A M (fig. 92) avec le point lumineux F, trouver la longueur M Q du rayon réfléchi.* On cherchera (par quelqu'une des formules qu'on a données ci-dessus), le rayon MC de la développée au point M, & ayant pris l'arc infiniment petit Mm, on imaginera les rayons incidens & réfléchis que représente la figure. Des centres F & Q on décrira les arcs Mn, MN; on menera les perpendiculaires CP, Cp, CB, Cb sur les rayons incidens & réfléchis; on fera ensuite $FM = y$ & $MP = MB$ (parce que les angles PMC, BMC étant égaux, tous les points de la ligne CM sont également distans des lignes BM, MF) $= a$. Cela posé, il suit de ce qu'on a dit ci-dessus, que les triangles Mnm, MNm sont égaux & que $MN = Mn$; de plus, parce que les angles d'incidence & de réflexion sont égaux, l'on a $CP = BC$, $Cp = bC$, & par conséquent $CP - Cp = CP - CS = PS = CB - Cb = Bg$. Mais les triangles FPS, FMn sont semblables, aussi bien que les triangles QMN, QBg; donc $FM\ (y) : FP\ (y-a) :: MN : PS$, ou (*componendo* & *invertendo*) $2y-a : y :: Mn + PS = MN + Bg : Mn = MN :: MQ + QB = MB = MP = a : MQ = \frac{ay}{2y-a}$;

Si la courbe étoit convexe du côté de F, y deviendroit négatif, & l'on auroit $MQ = \frac{-ay}{-2y-a}$

$= \frac{ay}{2y+a}$. Si l'on ſuppoſe y infini, alors les rayons incidens (fig. 91) ſont cenſés parallèles, & l'on a $MQ = \frac{ay}{2y} = \frac{a}{2}$.

Lorſque la courbe AM (fig. 92) eſt géométrique, l'on peut avoir géométriquement tous les points de ſa développée; l'on peut auſſi trouver, par le moyen de la courbe AMB (fig. 89), une ligne droite égale à une portion quelconque RQ de la cauſtique, qui dans ce cas eſt rectifiable.

Si la courbe AM (fig. 90) eſt convexe du côté du point lumineux F, MQ ſera $= \frac{ay}{2y+a}$; quantité qui ſera toujours poſitive; ainſi il faudra la prendre du côté où ſe termine le rayon de la développée MQ, & les rayons infiniment proches ſeront *divergens* (*).

Si (fig. 92) la courbe eſt concave du côté de F; la valeur de $MQ = \frac{ay}{2y-a}$ ſera poſitive, lorſque y ſera $> \frac{a}{2}$, négative, ſi $\frac{a}{2} < y$, & infinie, ſi $y = \frac{a}{2}$. Dans le premier cas les rayons réfléchis ſont convergens; ils ſont divergens dans le ſecond cas, & parallèles dans la troiſiéme.

Si on décrit un cercle dont le diamètre MH (fig. 93) ſoit la moitié du rayon oſculateur MC, à cauſe des triangles rectangles ſemblables, MKH,

(*) Les rayons *divergens* ſont ceux qui vont en s'écartant les uns des autres, & les rayons *convergens* ſont ceux qui vont en s'approchant les uns des autres.

MPC,

MPC, l'on aura $MK = \frac{MP}{2} = \frac{a}{2}$, comme l'on a $MH = \frac{MC}{4}$; donc si le point F tombe sur le point K, c'est-à-dire, si le point F tombe sur la circonférence du cercle, les rayons réfléchis seront parallèles; ils seront convergens, s'il tombe hors du cercle, & divergens, s'il tombe dans le cercle.

Si la courbe AM (fig. 96. A) est supposée une parabole ordinaire, & que le point f, d'où partent les rayons, soit le foyer de la parabole, par la propriété de cette courbe, les angles que fait la tangente avec le rayon vecteur & le diamètre correspondant, seront égaux (comme on l'a vu dans les sections coniques); donc le rayon réfléchi MQ sera parallèle à l'axe Af.

Si la courbe AM (fig. 94) est une ellipse, & que le point lumineux F soit un des foyers, le rayon réfléchi passera par l'autre foyer f; car par la propriété de cette courbe (comme on l'a vu dans les sections coniques), les angles que forme la tangente avec les lignes tirées aux foyers, sont égaux; donc, &c.

Si la courbe AM (fig. 95) est une hyperbole & que le point lumineux F soit un des foyers, les rayons réfléchis prolongés passeront par l'autre foyer f, & s'ils partent de f, leurs prolongemens passeront par F; cela suit de ce que les angles que forme la tangente avec les lignes FM, fm sont égaux, ainsi qu'on l'a vu dans sections coniques.

118. PROBLÊME. *Trouver la caustique par réflexion de la parabole AM (fig. 96), en supposant les rayons incidens FM parallèles entr'eux & perpendiculaires à l'axe AR de la parabole.* Puisque les rayons sont parallèles, on peut supposer $y = \infty$, & l'on aura

$MQ = \frac{ay}{2y-a} = \frac{ay}{2y} = \frac{a}{2}$. Du milieu H du rayon de la développée, je mene HK perpendiculaire sur MP $= a$, & tirant les autres lignes que représente la figure, l'on a (à cause des triangles semblables) MC : MH :: MP : MK :: 2 : 1 :: $a : \frac{a}{2}$; donc MK $= \frac{a}{2} =$ MQ. Portant donc MK sur le rayon réfléchi MB & faisant MQ $= \frac{a}{2}$, le point Q sera à la caustique, & l'on pourra de même trouver tant de points de la caustique que l'on voudra. Au point A, le rayon de la développée est égal à la moitié du paramétre & situé sur l'axe; ainsi MP $= a$ devient alors $= 0$, & la caustique passe par le sommet A de la parabole.

Pour trouver l'équation de la caustique, je suppose l'abscisse AR$=p$, l'ordonnée QR$=q$, & prolongeant MQ jusqu'à l'axe en V, je fais MV$=z$, M$f=y$, l'abscisse indéterminée A$f=x$, la sous-normale fD $= \frac{ydy}{dx}$. Maintenant à cause de l'angle fMV divisé en deux également par la ligne MD, l'on a (voyez la Géométrie) Mf : MV :: fD : DV, ou $y : z :: \frac{ydy}{dx}$: DV $= \frac{zdy}{dx}$; donc fV$=$ fD$+$DV$= \frac{ydy+zdy}{dx}$. Mais le triangle rectangle fMV donne $(fV)^2 = (MV)^2 - (fM)^2 = zz - yy$; donc $fV = \sqrt{(zz-yy)} = \frac{ydy+zdy}{dx}$; donc [en multipliant par dx, quarrant, transposant, & divisant par $z+y$] $zdy^2 + ydy^2$

$= dx^2 (z - y)$, d'où l'on tire $z = \frac{y(dy^2 + dx^2)}{dx^2 - dy^2}$. Subſtituant cette valeur de z dans celle de $fV = \frac{y\,dy + z\,dy}{dx}$, il vient $fV = \frac{2y\,dy\,dx}{dx^2 - dy^2}$. Ayant mené Qm parallèle à l'axe, les triangles MQm, MfV ſeront ſemblables, & l'on aura $MV : MQ :: Mf : Mm$; or $MQ = \frac{a}{2} = \frac{MP}{2}$. Mais le côté MP du rayon oſculateur, en faiſant dx conſtant, eſt $= \frac{ds^2}{-ddy}$ (nous avons déſigné ce côté n° 103 par CN); donc la moitié de ce côté, qui eſt ici $= \frac{MP}{2}$, ſera $\frac{dx^2 + dy^2}{-2ddy}$; donc $\frac{y(dx^2 + dy^2)}{dx^2 - dy^2} : \frac{dx^2 + dy^2}{-2ddy} :: y : \frac{dx^2 - dy^2}{-2ddy} = Mm = Mf - QR = y - q$; donc $q = y + \frac{dx^2 - dy^2}{+2ddy}$. De plus $Mf : Mm :: fV : mQ = fR$; donc $y : \frac{dx^2 - dy^2}{-2ddy} :: \frac{2y\,dy\,dx}{dx^2 - dy^2} : fR = \frac{dy\,dx}{-ddy}$; & partant $fR = AR - fA = p - x = \frac{dy\,dx}{-ddy}$, & $p = x + \frac{dy\,dx}{-ddy}$. Les expreſſions de p & de q peuvent ſervir pour toutes ſortes de courbes, en employant leurs équations.

Soit le paramètre de la parabole $= 1$, l'on aura $y^2 = x$, $y = x^{\frac{1}{2}}$, $dy = \frac{1}{2} . x^{-\frac{1}{2}} . dx$; $dy^2 = \frac{1}{4} . x^{-1} . dx^2$, $ddy = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} . dx^2$, en

ſuppoſant dx conſtant. Subſtituant ces valeurs de y, dy, ddy, dans les valeurs de q & de p, il viendra

$$q = x^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}.\, x^{-1}\, dx^2}{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx^2} - \frac{dx^2}{\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} dx^2} = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

$$- 2 x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - 2 x^{\frac{3}{2}}, \text{ \& } q^2 = \frac{9}{4} x - 6 x^2 + 4 x^3.$$

Mais l'on a $p = x + \frac{dy\, dx}{-ddy} = x +$

$$\frac{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}.\, dx^2}{\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}.\, dx^2} = x + 2x = 3x; \text{ donc } x = \frac{p}{3}.$$

Subſtituant cette valeur de x dans celle de q^2, l'on a $q^2 = \frac{3p}{4} - \frac{2}{3}.\, p^2 + \frac{4}{27}.\, p^3$. Si on multiplie les termes de cette équation par le paramètre $1 = b$ autant qu'il eſt néceſſaire pour les rendre homogenes, l'on aura $bq^2 = \frac{3b^2p}{4} - \frac{2bp^2}{3} + \frac{4}{27}.\, p^3$, équation de la cauſtique.

Pour trouver le point S, où la cauſtique rencontre l'axe de la courbe AM, je remarque qu'alors on a $z = MQ = \frac{a}{2} = \frac{ds^2}{-2\, ddy}$; donc $z = \frac{y.(dx^2 + dy^2)}{dx^2 - dy^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{-2\, ddy}$, ou $-2y\, ddy = dx^2 - dy^2$, ou $dy^2 - 2y\, ddy = dx^2$, formule qu'on peut employer pour toutes ſortes de courbes, en ſubſtituant les valeurs de y, dy, ddy.

Dans la parabole, en ſubſtituant les valeurs de y, dy, ddy, priſes de ſon équation, & ſuppoſant le paramètre $= 1$, l'on trouvera $x = \frac{3}{4}$; c'eſt-à-dire, que ſi on prend la ligne Af égale aux trois

quarts du paramêtre, le rayon réfléchi correspondant touchera la caustique au point où elle coupe l'axe de la parabole.

Pour trouver le point Q de la caustique le plus éloigné de l'axe (fig. 96. A), je remarque que le rayon réfléchi doit être alors parallèle à l'axe; donc l'angle fMQ est droit; donc l'angle $fMA = QMn = 45^{\circ} = Mni$; donc $dx = dy$, c'est-à-dire, que le rayon réfléchi est parallèle à l'axe lorsque $dx = dy$.

L'équation de la parabole, en faisant le paramêtre $= 1$, donne $y^2 = x$, $2ydy = dx$, ou en substituant la valeur $x^{\frac{1}{2}}$ de y, $2x^{\frac{1}{2}} dy = dx$; & divisant le premier membre par dy & le second par dx, qui dans ce cas est $= dy$, il vient $2x^{\frac{1}{2}} = 1$, $x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, & $x = \frac{1}{4}$; c'est-à-dire, que si le rayon incident coupe l'axe au quart du paramêtre, ou, ce qui revient au même, si le rayon incident passe par le foyer de la parabole, le rayon réfléchi sera parallèle à l'axe, & touchera le point le plus élevé de la caustique.

119. PROBLÈME. *Trouver la caustique par réflexion lorsque les rayons incidens FM perpendiculaires au diamêtre Aa vont rencontrer la demi-circonférence ADa d'un demi-cercle (fig. 97).* Ayant tiré les rayons réfléchis MQ & les autres lignes que représente la figure, parce que le rayon de la développée d'un cercle est toujours égal au rayon de ce cercle, l'on aura $MH = \frac{MC}{2}$; & supposant HQ perpendiculaire sur MQ, MQ sera $= MK = \frac{MP}{2} = \frac{a}{2}$. Si le point M tombe sur le point D, l'on aura $MQ = DB = \frac{DC}{2}$.

Mais la différence du rayon incident qui répond au point M & de celui qui répond au point A, est $= PM$, & le

rayon réfléchi au point A est $=0$; donc, selon ce qu'on a dit ci-dessus (116), l'arc AQ est $=PM+MQ=3MQ$, & l'arc $AB=3DB$, c'est-à-dire, que l'arc AB est triple du demi-rayon DB.

Ayant décrit du centre C l'arc BS, décrivez le cercle MQH avec le diamètre $MH=CH$. Puisque l'angle MQH est droit, le point Q sera à la circonférence de ce cercle; de plus l'angle QMH est $=CMP=HCB$ (son alterne interne); donc les arcs $\frac{HQ}{2}$, HB qui mesurent ces angles, sont entr'eux comme les rayons $\frac{HM}{2}$, BC des cercles HQM, BS. Mais BC est double de $\frac{HM}{2}$; donc l'arc BH est égal à l'arc HQ. Ainsi la courbe AB est formée par la révolution d'un cercle dont le diamètre est $=BC=\frac{AC}{2}$, de maniere que l'arc BH du cercle immobile est toujours égal à l'arc correspondant QH du cercle mobile; & partant la courbe BA est un arc d'épicycloïde.

On peut voir cette courbe en faisant éclairer l'intérieur d'un vase demi-cylindrique par le lumiere du soleil.

120. PROBLÈME. *Si les rayons incidens partent de l'extrémité F du diamètre Fa d'un demi-cercle, comment déterminer la nature de la caustique par réflexion (fig. 98)?*
Supposant le rayon incident FM & le rayon réfléchi MQ, je mene CP perpendiculaire sur FM, l'on aura $FM=y$, & $MP=a=\frac{y}{2}$ (car la corde est divisée en deux parties égales par une perpendiculaire menée du centre sur la corde, comme on l'a vu dans la Géométrie); donc $2y=4a$. Ainsi $MQ=\frac{ay}{2y-a}=\frac{ay}{4a-a}=\frac{ay}{3a}=\frac{y}{3}$. Prenant donc MQ égal au tiers de FM, le point Q sera à la caustique; donc en prenant aB égal au tiers du diamètre Fa, le point B sera aussi à la caustique.

Si l'on prend Cb égal au tiers du rayon CM, & qu'on mene bi parallèle à CP, les triangles MCP, Mbi seront semblables, & l'on aura $MC : Mb :: MP : Mi$. Donc Mi sera les deux tiers de MP ou le tiers de FM; donc $MQ=Mi$. C'est

pourquoi si sur M b comme diamètre l'on décrit un cercle, les angles droits Q & i seront à la circonférence de ce cercle, & de plus ce cercle sera égal au cercle du rayon C b.

L'arc b B du demi-cercle B b D est égal à l'arc b Q du cercle b M; car l'angle M C a (externe au triangle isocelle F M C) vaut les deux angles égaux M F C, F M C; donc il est double de l'angle F M C = C M Q. Il est donc égal à l'angle i M Q, lequel a pour mesure la moitié de l'arc $i b$ Q ou l'arc b Q. Mais l'angle M C a a pour mesure l'arc B b; ainsi l'arc B b est égal à l'arc b Q; & partant la caustique B Q F est une épicycloïde formée par la révolution d'un point Q d'un cercle M i b, qui tourne sur un cercle égal B b D.

121. PROBLÈME. *Soit la courbe A D (fig. 99) une demi-cycloïde décrite par le mouvement du demi-cercle M H n sur la ligne A B, soient les rayons incidens F M parallèles à l'axe B D, quelle sera la caustique par réflexion?* Selon ce qu'on a dit ci-dessus (106), en parlant du rayon osculateur de la cycloïde, la ligne M H perpendiculaire à la courbe est la moitié du rayon de la développée; donc menant H Q perpendiculaire sur le rayon réfléchi M Q, le point Q sera à la caustique, & l'on aura par-tout M Q = M K; donc au point B, l'on a M Q = D B, & la caustique passe par ce point. Si du centre S du demi-cercle générateur l'on mene au point touchant H & au point décrivant M les rayons S M, S H, il est visible que S H sera perpendiculaire sur la tangente A H, & que l'angle S M H = K M H = M H S; donc le rayon réfléchi passe par le centre S. Mais le cercle qui a pour diamètre H S passe par le point Q, puisque l'angle H Q S est droit; donc les arcs H n, $\frac{HQ}{2}$, qui mesurent l'angle H S n, sont entr'eux comme les diamètres M n, S H des cercles auxquels ces arcs appartiennent. C'est pourquoi à cause de S H = $\frac{Mn}{2}$, l'arc H Q est = H n = H B; ainsi la caustique est une cycloïde décrite par la révolution entiere d'un cercle H S dont le diamètre est la moitié de M n.

122. PROBLÈME. *Soit la courbe F M une spirale logarithmique, on demande la caustique par réflexion, en supposant que les rayons incidens F M partent du foyer F (fig. 100)?* Selon ce qu'on a dit ci-dessus (108), si de l'ex-

trémité C du rayon osculateur MC l'on mene une perpendiculaire sur MF, elle rencontrera cette ligne au point F; donc on aura $MF = a = y$, & $MQ = \frac{ay}{2y-a} = y$; & le triangle FMQ sera isocelle. De plus les angles d'incidence & de réflexion étant égaux & l'angle FMQ étant divisé en deux également par MC, qui coupe la base FQ du triangle MFQ en deux également & perpendiculairement, la ligne FQ sera parallèle à la tangente MT, & les angles alternes & internes MQF, QMS = FMT seront égaux; donc les angles que font les lignes FQ avec les tangentes de la caustique, sont égaux aux angles des rayons de la spirale avec la tangente. La caustique est donc une spirale logarithmique qui ne differe de la proposée que par la position. Venons aux caustiques par réfraction.

123. Si un rayon de lumiere AB, en passant d'un milieu H (*) [fig. 88] dans un autre pNb au lieu de suivre sa premiere direction Aa, prend à l'instant de son passage la direction BK, en s'éloignant ou en s'approchant de la ligne BN perpendiculaire à la surface qui sépare les deux milieux, ce rayon est dit *réfracté*, & l'angle nBK que fait ce rayon avec la perpendiculaire BN s'appelle *angle de réfraction* C'est une loi que suit la lumiere que le sinus de l'angle d'incidence ABM ou de son égal nBa (que nous appellerons aussi angle d'incidence), est au sinus de l'angle nBK de réfraction en raison constante; de sorte que $ma : nK$ en raison constante de $m : n$. Par exemple, quel que soit l'angle d'incidence, si le rayon de lumiere passe de l'air dans le verre, ce rapport est à peu près égal à celui de 3 : 2 & égal à celui de 2 : 3, lorsque la lumiere passe du verre

(*) Par *milieu* on entend tout espace que la lumiere traverse.

dans l'air. Nous ſuppoſerons dans la ſuite que ce rapport eſt exact.

Si le rayon réfracté BK rebrouſſoit ſon chemin, je dis qu'il prendroit la route BA par où il étoit venu; car on auroit $n : m :: nK : AM = \frac{m}{n} \cdot Kn = ma$, en ſuppoſant BA = Ba; or on a AM $= ma : nK :: m : n$; donc MA $= \frac{m}{n} \cdot Kn$; donc &c.

Si une infinité de rayons BA, BM qui partent d'un point lumineux B (fig. 101) ſe refractent à la rencontre d'une ligne courbe AD, en s'approchant ou en s'éloignant des perpendiculaires MC, de maniere que le *ſinus* CE de l'angle d'incidence EMC ſoit toujours au *ſinus* CG de l'angle de réfraction, en raiſon donnée de $m : n$, la courbe NFH que touchent les rayons rompus ou leurs prolongemens AH, MF (fig. 102) eſt appellée *cauſtique par réfraction*.

Si l'on conçoit qu'un fil AH (fig. 101) enveloppe la cauſtique HN, l'extrémité A de ce fil décrira une courbe AK dont la cauſtique ſera la développée, & l'on aura l'arc FH de la cauſtique, plus la tangente FL égal à la ligne HA. Suppoſons une autre tangente infiniment proche Fml un autre rayon d'incidence Bm, & que des points F & B pris pour centres, on décrive les arcs Mn, Mt, les triangles rectangles Mtm, Mnm feront ſemblables aux triangles MEC, MCG chacun à chacun. En effet ſi des angles droits EMt, mMC l'on retranche l'angle mME, les angles reſtans tMm, EMC ſeront égaux. De même ſi des angles droits GMn, CMm on ôte l'angle GMm, les angles reſtans mMn, GMC

feront égaux; par conféquent tm : mn :: CE : CG :: $m : n$. Mais tm eft la différentielle de BM & mn celle de LM; donc par le lemme ci-deffus (115) BM — BA, fomme de toutes les différences tm dans la portion de courbe AM, eft à ML = AH — MF, — FH, fomme de toutes les différences nm correfpondantes, comme $m : n$; donc l'on a $m : n$ :: BM — BA : (AH — MF — FH) = $\frac{n}{m}$. (BM — BA), d'où l'on tire FH = AH — MF + $\frac{n}{m}$. BA — $\frac{n}{m}$. BM.

Il y a différens cas, felon que le rayon incident BA eft plus grand ou moindre que BM, & que le rayon rompu AH enveloppe ou développe l'arc HF. Mais on prouvera toujours que la différence des rayons incidens eft à la différence des rayons rompus, en joignant à l'un d'eux l'arc de la cauftique qu'il développe avant que de tomber fur l'autre, comme $m : n$. Par exemple (fig. 102) BA — BM : AH — MF — FH :: $m : n$ (*); d'où il eft facile de tirer l'équation FH = AH — MF + $\frac{n}{m}$. BM — $\frac{n}{m}$. BA.

Si du point B avec le rayon BA (fig. 101, l'on décrit l'arc AP, PM fera la différence des rayons incidens BM, BA; & fi le point B eft infiniment éloigné de l'arc AM, les lignes BA, BM feront cenfées parallèles, l'arc PA fera cenfé une

(*) Ici MF développe l'arc FH avant de tomber fur AH.

ligne droite perpendiculaire sur les rayons incidens, & l'on aura $FH = AH - MF - \frac{n}{m}. PM.$

124 PROBLÊME. *Etant donné la courbe AD (fig. 101) le point lumineux B & le rayon incident BM, trouver sur le rayon rompu MF le point F où il touche la caustique par réfraction?* Ayant trouvé par quelqu'une des formules ci-dessus le rayon MC de la développée au point M, on prendra l'arc infiniment petit Mm; on tirera la ligne Cm; on menera les perpendiculaires CE, Ce, CG, Cg sur les rayons incidens & rompus; & l'on menera aussi les lignes données BM (y), ME (a), MG (b). & l'on décrira l'arc Mt (dx). Cela posé, les triangles semblables MEC & M$t$$m$, MGC & mnM, BMt & BQe donnent ME (a) : MG (b) :: $Mt(dx)$: $Mn = \frac{bdx}{a}$, & BM (y) : BQ ou BE (*) $= (y + a) :: Mt = dx : Qe = \frac{dx.(a+y)}{y}$.

Mais par la loi de la réfraction $Ce : Cg :: CE : CG :: m : n$; donc (*dividendo*) $Ce - CE = Qe : Cg - CG = Sg :: m : n$, ou $m : n :: Qe = \frac{dx.(a+y)}{y} : Sg = \frac{andx + nydx}{my}$. De plus les triangles semblables FMn, FSg donnent $Mn : Sg :: MF : FS$, ou *dividendo* $Mn - Sg = \frac{(bmydx - anydx - aandx)}{amy} : Mn = \frac{(bdx)}{a} ::$

(*) Car ces lignes ne diffèrent que de la quantité infiniment petite QE.

$MS = MG = b : MF = \frac{bbmy}{bmy - any - aan}$, ce qui donne la conſtruction ſuivante.

Soit fait vers CM (fig. 103) l'angle E CH=MCG, & ſoit priſe vers le point B, la ligne $MT = \frac{aa}{y}$. Si l'on fait HT : HE :: MG : MF (V), le point F ſera à la cauſtique par réfraction. En effet les triangles ſemblables C G M, C E H donnent CG : CE :: MG = b : EH; mais CG : CE :: $n : m ::$ $b : EH = \frac{b.m}{n}$. Donc $HE - ME = HM = \frac{bm - an}{n}$, & $HM - MT = HT = \frac{bmy - any - aan}{ny}$; donc en ſubſtituant dans la proportion V les valeurs analytiques des trois premiers termes, l'on aura $(\frac{bmy - any - aan}{ny}) : \frac{bm}{n} :: b : MF = \frac{bbmy}{bmy - any - aan}$.

Si la valeur de HT eſt négative, il eſt évident que celle de MF le ſera auſſi; donc le point M tombera entre les points G & F, lorſque le point H ſe trouvera entre T & E.

Si la courbe étoit concave du côté du point lumineux B (fig. 102), y deviendroit négatif, & l'on auroit $MF = \frac{-bbmy}{-bmy + any - aan} = \frac{bbmy}{bmy - any + aan}$, & la conſtruction feroit la même. Si l'on ſuppoſe y infini ou les rayons incidens parallèles, on aura $MF = \frac{bbmy}{bmy - any} =$

$\frac{bbm}{bm - an}$. De plus on aura (fig. 103) MT $= \frac{aa}{y} = 0$; donc dans ce cas on fera HM : HE :: MG : MF.

Si l'on suppose que AM soit un arç de cercle d'un rayon infini, ou si l'on suppose que AM soit une ligne droite, alors MC sera infinie, aussi bien que ME $= a$, & MG $= b$; donc la quantité $bmy - any$ disparoîtra devant aan, & l'on aura MF $= \frac{bbmy}{\mp aan}$, (le signe — a lieu pour la fig. 103 & le signe + pour la fig. 102); & faisant alors HT $= \frac{aa}{y}$, la construction sera la même.

Le rapport du *sinus* d'incidence au *sinus* de réfraction n'étant pas le même pour toutes les matieres diaphanes, avant de chercher la caustique, on doit connoître la raison de $m : n$ pour la matiere dont est composée la courbe dont on demande la caustique.

Si m est infinie par rapport à n, le rayon rompu MF tombera sur la perpendiculaire CM, & la caustique par réfraction deviendra la développée; car alors on aura MF $= b$, qui devient en ce cas $=$ MC.

Si (fig. 102) le rayon incident BA est perpendiculaire sur la courbe, alors les lignes ME, MG deviendront égales entr'elles & au rayon MC; donc alors $a = b$; & supposant les ordonnées y parallèles entr'elles, l'on aura MF $= \frac{bbmy}{bmy - any} = \frac{bm}{m - n}$.

125. EXEMPLE Ier. *Soit la courbe AD (fig. 104) un quart de cercle dont le centre soit C & les rayons incidens BM, BA parallès entr'eux & perpendiculaires sur DC, supposons de plus que m : n :: 3 : 2, on demande le rayon MF de la caustique?* Tous les rayons du cercle se réunissant au centre, le point C sera la développée du cercle ; donc si on décrit une demi-circonférence CEM dont le diamêtre CM soit égal au rayon CD, & qu'on fasse 3 : 2 :: CE : CG, ou qu'on fasse $CG = \frac{2}{3}.CE$, la ligne indéfinie MG sera le rayon rompu, & l'on déterminera MF, comme il a été enseigné ci-dessus..

Pour trouver le point H où le rayon incident BA (prolongé) perpendiculaire au quart de cercle touche la caustique, on prendra la formule $\frac{bm}{m-n}$, qui devient $\frac{3b}{3-2} = 3b = 3AC$.

Si l'on décrit un demi-cercle DNC dont CD soit le diamétre, qu'on fasse $CN = \frac{2}{3}.CD$, le point N sera à la caustique; car puisque le rayon incident BD touche la courbe en D, l'on a ME (fig. 103) $= a = 0$; donc $MF = \frac{bbmy}{bmy - any - aan}$ devient $= \frac{bbmy}{bmy} = b = MG$; donc, &c.

L'arc FH (fig. 104) est $= AH - MF - \frac{2}{3}PM$, & la caustique entiere $HN = 3b - DN - \frac{2}{3}AC = 3b - \frac{2}{3}b - DN = \frac{7}{3}b - DN$. Mais $CN = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3}b$, & le triangle rectangle CND donne $(DN)^2 = b^2 - \frac{4}{9}b^2 = \frac{5}{9}b^2$, où $DN = \frac{b\sqrt{5}}{3}$; donc $HN = \frac{b.(7-\sqrt{5})}{3}$.

126. PROBLÊME. *Déterminer la caustique par réfraction d'une spirale logarithmique, en supposant que les rayons incidens partent du pôle B de la courbe* (*fig.* 105). Il est évident qu'ici le point E tombe sur le point B, & que $y = a$; donc MF

$$= \frac{bbmy}{bmy - any + aan}$$ (cette expression a lieu lorsque la courbe est concave du côté de B) devient $= b$; de sorte que le point F tombe sur le point G.

Ayant mené la tangente Mt, & la ligne BG, l'angle nGB, supplément de l'angle BGM, sera = BMt. En effet tirant la ligne tBC perpendiculaire sur MB, le demi-cercle dont le diamêtre est MC passera par B; donc les angles BGn, BMt ont chacun pour mesure la moitié de l'arc BM (*); donc l'angle BGn que forme la ligne BG avec la tangente MG de la caustique BN, est par-tout égal à l'angle que forme le rayon de la courbe proposée avec sa tangente; & partant la caustique est la même spirale que la courbe BM, & n'en differe que par sa position.

127. PROBLÊME. *Etant donné la courbe AM avec sa caustique HF qu'on peut trouver par ce qu'on a dit ci-dessus, la ligne AH tangente de la caustique MF, un point b situé sur AH, & les rayons incidens BM étant supposés paralleles, trouver une autre courbe Dm telle qu'elle fasse que les rayons brisés*

(*) Car le premier angle étant formé par une corde & le prolongement d'une autre corde, a pour mesure la demi-somme des arcs sou-tendus par ces deux cordes, & le second arc étant formé par une tangente & une corde, a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.

Mm, en se refractant de nouveau, passent tous par le point b (*fig.* 106). Si l'on suppose que le rayon bm rebrousse son chemin, il suit de ce qu'on a dit ci-dessus (123) qu'il suivra la ligne mM; donc si l'on considere le point b comme le point lumineux de la courbe Dm, dont on prendra le point D à discrétion sur la ligne AH, les prolongemens mF des rayons réfractés mM toucheront la ligne FH, qui sera la caustique commune des courbes AM, Dm. Si l'on mene la ligne AP perpendiculaire sur BA, on aura $BM - BA = hM$.

On prendra $FM = AH - FH$, & ayant mené Mh parallèle à BA, & perpendiculaire sur AP, on prendra $Mq = \frac{n}{m} . hM$, & l'on tirera MP parallèle à hq. Maintenant à cause des triangles semblables hqM, PMm, & de $Mq = \frac{n}{m} . hM$, l'on aura $m : n :: hM : Mq :: Pm : Mm = \frac{n}{m} . Pm$. Donc le point m ainsi déterminé sera un point de la courbe cherchée. En effet l'on aura $FM = Mm + mF = \frac{n}{m} . Pm + mF = AH - FH$; donc (par le n° 123) la courbe cherchée Dm à la propriété demandée.

128. PROBLÈME. *Etant donné la courbe FH avec le point lumineux B* (*fig.* 107.) *trouver une courbe AM, dont FH soit la caustique par réfraction.* Du point B je tire BH tangente de la courbe FH, & je suppose que le point A soit un point de la courbe cherchée. Je tire une autre tangente FM à EF, & je fais $Fq = \frac{n}{m} . BA + AH - FH$. Je tire la ligne Bq, je fais $m : n :: qm : bm$; menant $bm = qm \times \frac{n}{m}$, & la ligne BM parallèlement à bm, le point M, où cette ligne rencontre Fq, sera un point de la courbe cherchée; car l'on aura $qM : BM :: qm : bm ::$

m:

$m:n$; donc $qM = \frac{n}{m}.BM$ & $qF = qM + FM = \frac{n}{m}.BM + FM = \frac{n}{m}.BA + AH - FH$ (par hypothèse); donc $\frac{n}{m}.(BM - BA) = \frac{n}{m}.MP = AH - FH - FM$; donc, selon ce qu'on a dit ci-dessus (123), la courbe AM, ainsi décrite, sera la courbe cherchée.

Si les rayons incidens sont parallèles entr'eux (fig. 108.), on prendra $Fq = AH - FH$ & faisant $m:n::qm:bm$, l'on menera mb parallèle à HA, & du point P où la ligne qb (prolongée s'il le faut) rencontre la ligne AP perpendiculaire à HA, on tirera la ligne PM parallèle à AH, le point M où cette ligne rencontre qF, sera un point de la courbe cherchée. En effet les triangles semblables qbm, qPM donnent $PM : qM :: bm : qm :: m : n$; donc $qM = \frac{n}{m}.PM$ & $qF = qM + FM = AH - FH$ (par supposition), ou $\frac{n}{m}.PM = AH - FM - FH$.

REMARQUE. Il est évident que la courbe AM est différente (fig. 107), selon que le point A est plus ou moins éloigné du point lumineux B, parce que la valeur de Fq change; d'où il suit que la même courbe FH peut être caustique par réfraction d'une infinité de courbes AM.

129. PROBLÈME. *Etant donné un point lumineux B (fig. 107), trouver une courbe AM (*) telle que tous les rayons rompus BM se rassemblent en un point F ou H?*

Par les principes qu'on a établis ci-dessus (123) en faisant la ligne $PM = z$, $BA = a$, & l'excès de AH sur MF ou de MF sur $HA = u$, pour avoir $AH - FM = \pm u$, selon que AH sera plus grande ou plus petite que FM, l'on aura $\frac{n}{m}.z = \pm u - FH = \pm u$, en supposant $FH = 0$ ou en supposant que la caustique se réduise à un seul point; donc alors $m : n :: z : \pm u$; d'où l'on voit que la différence PM du rayon incident MB & du rayon BA, est à la différence $\pm u$ des rayons réfractés & correspondans MF, AH dans la raison de $m:n$, & de-là l'on tire la construction des quatre ovales,

(*) Le point A est censé donné aussi bien que le point H.

dont parle Descartes vers la fin du second Livre de sa Géométrie, & qui ont fait tant de bruit parmi les Géomêtres.

Pour construire ces courbes (fig. 109), ayant tiré la ligne BAF, je lui mene sous un angle quelconque la ligne Tt; je prends Am à volonté & An telle que l'on ait $m : n :: \text{A}m : \text{A}n$; je mene mn & du point B comme centre, avec le rayon Bm, je trace un arc en i; prenant ensuite At = AF, du point F, avec le rayon tn, je trace un second arc qui coupe le premier au point i, qui est un point de la courbe cherchée. L'on trouvera de même tant d'autres points que l'on voudra, en prenant d'autres lignes Am & cherchant les points correspondans.

Si on suppose Am = o, l'on aura aussi An = o, & le point cherché tombera sur le point A. Pour prouver que ce point appartient à la courbe cherchée, je remarque que l'excès Am = z du rayon incident Bi sur BA est alors = o, aussi bien que la différence An du rayon AF sur Fi; or par construction $\text{A}m : \text{A}n :: m : n$, ou $z : u :: m : n$.

Si l'on fait AT = AF & qu'on prenne pour le rayon du second arc (qu'on doit tracer du point F) Tn au lieu de tn, le point i appartiendra à une autre ovale qui aura la même propriété que la premiere.

Pour la troisiéme & quatriéme ovale, l'on transportera le point F en f, de maniere que le point f soit plus éloigné du point A que le point B, & prenant pour la troisiéme AT = Af, du point f, avec le rayon Tn, on décrira un arc qui coupera l'arc décrit du point B avec le rayon mB au point cherché (*).

Pour avoir la quatriéme ovale, je prends At = Af, & le point f pour le centre du second arc décrit du rayon tn; le point où cet arc rencontrera le premier décrit du point B avec le rayon Bm, appartiendra à la courbe.

REMARQUE I. Dans la premiere & quatriéme de ces courbes, les rayons tn des seconds arcs sont moindres que FA ou fA; donc dans la premiere $\text{F}i = \text{FA} - u = b - u$, en faisant $\text{FA} = b$; de même dans la quatriéme $fi = b - u = b - \frac{nz}{m}$; au contraire dans les deux autres, l'on a Fi, ou $fi = b + u = b + \frac{nz}{m}$.

(*) Il n'importe pas que ce soit les rayons incidens ou leurs prolongemens qui se réunissent en f.

REMARQUE II. Pour avoir l'équation de ces courbes, d'un point quelconque M, je tire l'ordonnée Mp (y) perpendiculairement sur la ligne Ap, que je fais $= x$; & je me souviens que $\frac{n}{m}. z = u$, d'où l'on tire $z = \frac{m}{n}. u$. Cela posé dans la premiere & la seconde ovale, j'ai B$p = a + x$, F$p = b - x$; dans la troisiéme & quatriéme ovale, j'ai $fp = b + x$, fB $= b - a$; mais dans toutes les ovales, BM $= a + z = a + \frac{mu}{n}$. Maintenant les triangles rectangles BMp, FMp ou fMp, donnent $(BM)^2 - (Bp)^2 = (Mp)^2 = (FM)^2 - (Fp)^2$, ou $zz + 2az - x^2 - 2ax = yy = \frac{nn}{mm}zz \mp \frac{2nbz}{m} - xx \pm 2bx$; d'où l'on tirera une équation qui ne contiendra que les variables x & y sans z, & ce sera l'équation de la courbe.

Si le point B est supposé infiniment éloigné, ou, ce qui revient au même, si les rayons incidens sont parallèles, l'on aura $a = \infty$; donc effaçant tous les termes dans lesquels ne se trouve pas a, l'équation $zz + 2az - xx - 2ax = yy$ deviendra $2az - 2ax = 0$, ou $2z - 2x = 0$, ou $x = z$. Substituant cette valeur de z dans l'équation $yy = \frac{nn}{mm}zz \mp \frac{2nbz}{m} - xx \pm 2bx$, elle deviendra, en transposant, $\left(\frac{mm - nn}{mm}\right). xx \pm \frac{2nbx}{m} \mp 2bx + yy = 0$ (*).

Si AF, ou Af, ou b est supposé infini, c'est-à-dire, si les

(*) La lumiere passant de l'air dans le verre, l'on a $m : n :: 3 : 2$; les termes qui contiennent xx & yy, sont positifs, & dans ce cas l'ellipse peut résoudre le problême (voyez ce que nous avons dit dans la premiere Partie Courb. algéb. n° 12). Au reste si les rayons doivent se réunir au point F, il faut supposer que la courbe AM, en tournant autour de son axe AF, engendre un solide dans lequel se fait la réfraction, & que le point F est dans ce solide, ou du moins qu'il est le centre d'une surfasse sphérique qui termine le solide du côté de F.

rayons rompus doivent être parallèles, l'équation $yy = \frac{nn}{mm} zz \mp \frac{2nbz}{m} - xx \pm 2bx$, deviendra $\mp \frac{2nbz}{m} \pm 2bx = 0$, d'où l'on tire $z = \frac{m}{n} x$. Substituant cette valeur de z dans l'équation $zz + 2az - xx - 2ax = yy$ & transposant, il vient $\left(\frac{mm - nn}{nn}\right) xx + \frac{2am}{n} x - 2ax - yy = 0$, équation à l'hyperbole. Or si les rayons incidens partoient de F ou de f, en supposant ces points à une distance infinie, ou, ce qui revient au même, si ces rayons étoient parallèles, ils se réuniroient évidemment en B dans le premier cas: puisque, selon ce qu'on a dit ci-dessus (123), un rayon rompu, en rebroussant son chemin, doit suivre la même route qu'il a suivie avant la réfraction; mais dans le second cas les prolongemens des rayons réfractés se réunissent en f; donc l'hyperbole & l'ellipse sont des courbes propres à résoudre le problême, lorsque les rayons incidens sont parallèles.

REMARQUE III. Comme la lumiere n'est pas homogenée, mais qu'elle est composée de sept rayons principaux, *rouge*, *jaune*, *orangé*, *bleu*, *verd*, *indigo* & *violet* (ainsi que l'a démontré M. Newton), qui sont tels que sous le même angle d'incidence, leurs angles de réfraction sont un peu différens, de sorte que le rouge se refracte moins que le verd, & celui-ci moins que le violet, il arrivera que si le rayon verd parvient en F, le violet parviendra en m par exemple, & le rayon rouge en L, en supposant que ces trois rayons tombent en M sous le même angle d'incidence; donc le foyer F ne sera pas absolument (mais seulement sensiblement) mathématique. Nous avons fait l'application de l'ellipse & de l'hyperbole à la dioptrique d'une maniere plus élémentaire dans nos Institutions Mathématiques.

Des points d'inflexion & de rebroussement.

130. Le point D, où une courbe de concave devient convexe ou réciproquement (fig. 110 & 111) s'appelle *point d'inflexion*. Si la courbe mDM (fig. 112 & 113), après avoir avancé de m en D, rebrousse son chemin vers M, le point D est appellé

point de rebrouſſement. Si l'on ſe rappelle ce qu'on a dit ci-deſſus (46) ſur les *maxima* & les *minima*, on comprendra aiſément que le rapport de dy à dx ou $\frac{dy}{dx}$ eſt néceſſairement un *minimum* (fig. 110) au point d'inflexion (il en eſt de même de $\frac{ddy}{dx^2}$); car, ſelon ce qu'on a dit dans l'endroit cité, les dy vont en diminuant dans la partie concave depuis A juſqu'en D, & en augmentant depuis D dans la partie convexe; c'eſt le contraire dans la fig. 111; donc dans le cas d'un point d'inflexion, le rapport $\frac{dy}{dx}$ croîtra juſqu'en D, & décroîtra enſuite ou réciproquement; donc au point D, il deviendra un *maximum* ou un *minimum*, & ſa différentielle ſera $\frac{ddy}{dx}$ (en ſuppoſant dx conſtant) $= 0$ ou $= \infty$; donc auſſi $\frac{ddy}{dx^2}$ ſera $= 0$, ou $= \infty$. Ce ſera la même choſe au point D de rebrouſſement (fig. 112 & 113); donc pour trouver les points d'inflexion & de rebrouſſement dans les courbes dont les ordonnées ſont parallèles, il ſuffit de ſuppoſer $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, ou $= \infty$, ou, ce qui revient au même, il ſuffit de ſuppoſer $ddy = 0$ ou ∞ (*).

(*) Nous ne croyons pas pour cela que ddy ſoit réellement $= \infty$; mais cette ſuppoſition donne le même réſultat

REMARQUE. Il eſt aiſé de voir qu'ayant tiré la tangente m D i & ſuppoſant mn = D S & menant Sir (fig. 110) ou Si (fig. 111), les triangles ſemblables & égaux mDn, DSi donneront Si = Dn ; donc Sr > Si = Dn (fig. 110), mais Sr < Dn (fig. 111): auſſi les dy vont en diminuant de A en D, & en augmentant de D en M (fig. 110) c'eſt le contraire dans la fig. 111 ; donc le rapport $\frac{dy}{dx}$ eſt un *maximum* ou un *minimum* au point D, comme on l'a dit ci-deſſus.

131. PROBLÊME. *Trouver le point d'inflexion D de la courbe A N (fig. 114) dont l'équation eſt* $ax^2 = y\,(aa + xx)$. Soit AC = x, AB = a, CD = y = $\frac{ax^2}{aa+xx}$; donc dy = $\frac{2a^3xdx + 2ax^3dx - 2ax^3dx}{(aa+xx)^2} = \frac{2a^3xdx}{(aa+xx)^2}$, & ddy = $\frac{2a^3dx^2(aa+xx)^2 - 4.a^3xdx.2xdx.(a^2+xx)}{(aa+xx)^4}$ (en ſuppoſant dx conſtant) = $\frac{(2a^7 - 4a^5x^2 - 6a^3x^4).dx^2}{(aa+xx)^4} = 0$. Multipliant par le dénominateur & diviſant par a^3dx^3, il vient $2a^4 - 4a^2x^2 - 6x^2 = 0$; diviſant par $a^2 + x^2$, l'on trouve $2a^2 - 6x^2 = 0$, ou $x^2 = \frac{2}{6}a^2 = \frac{1}{3}a^2$ & $x = \sqrt{(\frac{1}{3}aa)}$; donc prenant AC moyenne

que ſi on faiſoit $\frac{ddy}{dx^2} = \infty$, comme il ſera aiſé de le comprendre, en faiſant attention aux valeurs de ddy, dans les exemples qu'on va donner.

proportionnelle entre a & $\frac{2}{3}a$, l'ordonnée CD rencontrera la courbe au point cherché.

132. PROBLEME. *Trouver le point d'inflexion D dans une demi-cycloïde allongée AF (fig. 115).* Supposant la base B a de la demi-cycloïde ordinaire $= C$ & $D > C$, l'on aura, en faisant l'arc AM $= x$ & la demi-circonférence AMB $= C$, l'on aura, dis-je, $C : D = BF :: x : MN = y$. Mais si l'on veut rapporter les points de la courbe à l'axe AB, y sera $= PD = PM + \frac{Dx}{C}$; & supposant PM $= t$, l'abscisse AP $= u$, le rayon du cercle générateur $= r$, l'on aura $du = pP$, $nm = dt$. Donc $dy = dt + \frac{D.dx}{C}$; or par la nature du cercle, $t = (2r.u - uu)^{\frac{1}{2}}$, $dt = (rdu - udu) \times (2ru - uu)^{-\frac{1}{2}} = \frac{rdu - udu}{\sqrt{(2ru - uu)}}$. Mais en supposant nM parallèle à AB, le triangle rectangle nMm donne mM $= dx = \sqrt{(du^2 + dt^2)}$; donc $dy = \frac{rdu - udu}{\sqrt{(2ru - uu)}} + \frac{D}{C} \times \frac{\sqrt{[(rdu - udu)^2 + du^2 (2ru - uu)]}}{\sqrt{(2ru - uu)}}$, en substituant la valeur de dt. Multipliant les termes de la premiere fraction par C, effectuant la multiplication indiquée & réduisant, il vient $dy = \frac{Crdu - Cudu + D.r.du}{C.\sqrt{(2ru - uu}}$. Donc en supposant du constant, l'on aura $ddy = \frac{dd^2(-Cr^2 - Dr^2 + Dru)}{C.(2ru - uu).\sqrt{(2ru - uu)}}$

$= 0$, ou en ôtant le dénominateur & divisant par du^2, $-Cr^2 - Dr^2 + Dru = 0$, ou $Dru = Dr^2 + Cr^2$; ainsi $u = \frac{r^2(D+C)}{Dr} = r + \frac{Cr}{D}$. C'est pourquoi si on prend une quatrieme proportionnelle aux lignes D, C & r & qu'on l'ajoute au rayon r, l'on aura l'abscisse AC, à laquelle répond l'ordonnée CD, qui rencontre la cycloïde allongée au point d'inflexion.

133. PROBLEME. *Trouver le point d'inflexion D dans la courbe AD dont les ordonnées sont troisiemes proportionnelles à celles du demi-cercle AMB & de la parabole Am* (*fig.* 116). Soit le diamètre du cercle donné $= a$, l'abscisse $AC = x$, l'ordonnée CM du cercle $= t$, l'ordonnée Cm de la parabole $= y$ & l'ordonnée de la courbe proposée CD $= u$; l'on aura $t : y :: y : u = \frac{yy}{t}$. Mais en faisant le paramètre de la parabole $= p$, l'on a $y^2 = px$, & par la nature du cercle, t est $= \sqrt{(ax - xx)}$; donc en substituant ces valeurs, il viendra $u = \frac{px}{\sqrt{(ax-xx)}}$, d'où l'on tire $du = \frac{apxdx}{2.(ax-xx).\sqrt{(ax-xx)}}$. Différentiant de nouveau, en supposant dx constant, l'on aura, en divisant par dx, multipliant par $\sqrt{(ax-xx)}$ & ôtant la fraction, l'on aura, dis-je, $ddu = 0 = 2ap(ax-xx)^2 - 3apx(a-2x).(ax-xx)$; ainsi en divisant par $(ax-xx)$ & transposant, on aura $2a^2px - 2apx^2 = 3aapx - 6apx^2$, ou $2a - 2x = 3a - 6x$, d'où l'on tire $4x = a$ & $x = \frac{1}{4}a$; donc si l'on fait $AC = \frac{AB}{4}$, l'ordonnée CD rencontrera la courbe au point d'inflexion.

134. PROBLÊME. *Trouver le point de rebroussement de la courbe m D M (fig. 117), dont l'équation est* $y^5 = ax^4 = x^4$, *en supposant* $a = 1$. Soit $AP = x$, $PM = y$, l'on aura $5y^4 dy = 4x^3 dx$, & $dy = \frac{4}{5} \times \frac{x^3 dx}{y^4} = \frac{4}{5} dx \left(\frac{x^3}{x^{\frac{16}{5}}}\right)$ (*).

Donc en ôtant l'exposant $\frac{16}{5}$ du diviseur de l'exposant $3 = \frac{15}{5}$ du dividende, il vient $dy = \frac{4}{5} \times dx . x^{-\frac{1}{15}}$, $ddy = -\frac{4}{75} dx^2 (x)^{-\frac{1}{15}-1}$ (**). Mais $\frac{-1}{15} - 1 = -\frac{16}{15}$; donc $ddy = \left(-\frac{4}{75} \times \frac{1}{x^{\frac{16}{15}}}\right) \times dx^2$. La supposition de $ddy = 0$ ne donne rien à connoître; mais en supposant $ddy = \infty$, l'on a $x = 0$; ce qui fait voir que le point cherché répond à l'origine A des x, point auquel $AP = 0$. Substituant cette valeur de x dans l'équation de la courbe, l'on aura $y^5 = 0$, & $y = 0$.

REMARQUE. La méthode précédente a cela d'incommode, qu'elle ne fait point distinguer un point d'inflexion d'un point de rebroussement, ni un point d'inflexion visible de celui qui est invisible; & de plus elle pourroit induire en erreur, en faisant croire que tout point d'une courbe trouvé, par la supposition de $ddy = 0$ ou de $ddy = \infty$, est un point de rebroussement ou un point d'inflexion; ce qui cependant n'est pas : car en supposant dx constant, l'on tirera de l'équation au cercle $yy = 2ax - xx$, l'on tirera, dis-je, ddy,

(*) Car $y = x^{\frac{4}{5}}$, $y^4 = x^{\frac{16}{5}}$.

(**) On suppose dx constant.

$= \frac{-aadx^2}{(2ax-xx).\sqrt{(2ax-xx)}}$. Si l'on fait $ddy = \infty$, l'on aura le dénominateur $= 0$, ou $2ax - xx = 0$, ou $2ax = xx$, ou $2a = x$; ce qui indique ſeulement qu'à l'extrémité du diamètre la tangente eſt parallèle aux ordonnées. Il ne ſera donc pas inutile de donner une autre méthode.

135. Nous avons vu ci-deſſus (103) que la meſure de l'angle de courbure D C L (fig. 67) $= q$, étoit $= \frac{dyddx - dxddy}{ds^2}$. En ſuppoſant dx conſtant, l'on aura $q = \frac{-dxddy}{ds^2} = \frac{-dxddy}{dx^2 + dy^2}$. Cette formule ſuppoſe que les ordonnées ſont perpendiculaires aux abſciſſes. Si les ordonnées ſont ſuppoſées partir d'un point, en appellant R le rayon de la développée, l'on aura (n° 103) $R = \frac{yds^3}{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}$; mais en ſuppoſant que CQ eſt le rayon de la développée au point C de la courbe AD (fig. 118) rapportée au foyer F, les ſecteurs ſemblables CQD, DCL donneront $CQ = R : CD :: CD : DL = \frac{(CD)^2}{R} = \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{yds}$, en ſubſtituant les valeurs de $CD = ds$ & de R, & faiſant attention que $dx^3 + dxdy^2 = dx.(dx^2 + dy^2) = dxds^2$. Maintenant ſi l'on veut avoir la valeur q de l'angle DCL, en ſuppoſant le rayon $= 1$, l'on fera $CD = ds$ (*) : 1 :: DL :

(*) L'on ſuppoſe la corde CD égale à ſon arc, parce qu'un arc infiniment petit eſt cenſé égal à ſa corde.

$$q = \frac{DL}{ds} = \frac{dx.ds^2 + ydyddx - ydxddy}{yds^2}$$

$$= \frac{dxds^2 - ydxddy}{yds^2}$$, en ſuppoſant dx conſtant; ſi q eſt négatif, la courbe ſera convexe vers le foyer F, ou vers ſon axe, ſi la courbe eſt rapportée à un axe; on doit faire attention à ces valeurs de q.

Si la courbe eſt diſpoſée comme dans la fig. 119, il eſt viſible que la valeur de q aura le même ſigne aux points m & M. Il en ſera de même dans la fig. 113; mais dans la fig. 120 les ſignes de q ſeront différens.

Nous avons dit ci-deſſus (102) que la ſeule parabole vulgaire avoit au ſommet une courbure circulaire; cependant en cherchant le rayon de courbure des paraboles quelconque, qu'on peut repréſenter par l'équation $y^m = x$, en ſuppoſant le paramêtre $= 1$ & m un nombre quelconque entier ou fractionnaire, on trouvera par le moyen de la formule $\frac{ds^3}{-dxddy}$, en ſubſtituant les valeurs de dx & de ddy, l'on trouvera, dis-je, le rayon oſculateur $R = \frac{(m^2y^{2m-2}+1).\sqrt{(m^2y^{2m-2}+1)}}{(mm-m).y^{m-2}}$

$= \frac{(m^2y^{2m-2}+1)^{\frac{3}{2}}}{(mm-m)y^{m-2}}$. Si on ſuppoſe $m > 2$ & $y = 0$, l'on a $R = \frac{1}{(mm-m).0} = \infty$; ſi $m < 1$, le numérateur devient $(\frac{m^2}{y^{2-2m}})^{\frac{3}{2}}$ (en négligeant 1, qui dans ce cas diſparoît, puiſque

y^{2-2m} devient $=0$, & $\frac{m^2}{y^{2-2m}} = \infty$) $=$ $\frac{m^3}{y^{3-3m}}$. Supposant $mm - m = a$ & divisant la fraction que nous venons de trouver, par $\frac{a}{y^{2-m}}$, & faisant $\frac{m^3}{a} = B$, il vient B. $\frac{y^{2-m}}{y^{3-3m}} =$ $B.y^{2m-1}$, en ôtant l'exposant du diviseur de celui du dividende. Si $2m > 1$, l'on a $B \times 0 = 0$; si $2m = 1$, l'on a $m = \frac{1}{2}$ & $y^m = x$ devient $y^{\frac{1}{2}}$ $= x$ ou $y = x^2$, qui en changeant x en y & réciproquement, devient $y^2 = x$, équation à la parabole ordinaire, en supposant le paramètre $= 1$; & alors $R = B = -\frac{1}{2}$. Le signe $-$ indique que l'on doit prendre le rayon osculateur du côté opposé à l'axe des x, qui dans ce cas est une ligne tangente au sommet de la parabole, en supposant que l'angle des co-ordonnées est droit. Si $2m < 1$ ou $m > \frac{1}{2}$, en faisant $2m - 1 = n$, l'on a $R =$ $By^{-n} = \frac{B}{y^n} = \frac{B}{0}$ (en supposant $y = 0$) $= \infty$. Si $m = 2$, alors le numérateur $(m^2y^{2m-2} + 1)^{\frac{3}{2}}$ devient $= 1$, & le dénominateur devient $=$ $(mm - m).\ y^0 = mm - m$, à cause de $y^0 = 1$, & l'on a $R = \frac{1}{2}$. On ne peut pas supposer $m = 1$: car alors on auroit $y = x$, équation à la ligne droite.

De ce qu'on vient de dire, il suit qu'au sommet des paraboles, si l'on excepte la parabole vulgaire, le rayon de courbure est $= 0$ ou infini (*).

(*) Nous supposons ici que la parabole vulgaire a un paramètre fini.

Mais, ſelon ce qu'on a dit dans la premiere Partie de ce Cours, il n'y a aucun point dans une branche de courbe dont la courbure ne ſoit la même que la courbure au ſommet d'une parabole; & toutes les paraboles, excepté la vulgaire, ont à leur ſommet un point d'inflexion (viſible ou inviſible), ou un point de rebrouſſement : ainſi qu'il eſt facile de s'en convaincre, ſoit en les décrivant ſoit en ſe rappellant ce qu'on a dit dans la premiere Partie de cet Ouvrage. Donc au point d'inflexion & de rebrouſſement d'une branche de courbe, le rayon oſculateur eſt = 0 ou infini.

Pour faire mieux concevoir cela aux Commençans, ſoit la courbe M D*m* (fig. 120) qui ait un point d'inflexion D, auquel le rayon oſculateur ait été trouvé infini, il eſt évident qu'à proportion que les rayons oſculateurs MF, *n*F, *if* s'approchent du point d'inflexion D, ils doivent approcher du paralléliſme; & comme ils doivent toujours être perpendiculaires à la courbe, ſi l'on conçoit que le petit arc D*i* ſoit une ligne droite, le rayon *if* ſera perpendiculaire à cette droite, & ſera parallèle à la ligne DP, qu'on ſuppoſe perpendiculaire à D*i*; donc ces lignes ne peuvent ſe rencontrer, c'eſt-à-dire, que les rayons oſculateurs ne peuvent de poſitifs devenir négatifs, ou paſſer de la partie concave MD à la partie convexe D*m*, ſans devenir parallèles; de même ils ne peuvent paſſer de la partie convexe *m*D, ſans que les rayons oſculateurs ne ſoient devenus parallèles à D*p*. Mais une ligne droite *b*D ne peut dans la rigueur mathématique être regardée comme un arc de

cercle (*), en ſuppoſant même le rayon $bf = \infty$. En effet dans ce cas les perpendiculaires aux extrémités D & b de cette ligne, ſe rencontreroient au centre du cercle, formeroient un angle (ſi petit qu'on voudra), & les angles du triangle formé par les deux rayons, & la ligne D b vaudroient plus de deux angles droits, ce qui ne peut être; de plus un tel cercle ne ſeroit pas rond. En ſuppoſant donc Dn l'arc & Db la tangente, il y aura toujours un petit intervalle entre b & n, quelque grand que ſoit le rayon du cercle. Donc au point D il n'y a aucun cercle oſculateur, en ſuppoſant même le rayon du cercle $= \infty$. Si les rayons Mf, nf, (fig. 121) vont en diminuant, en s'approchant de D, de maniere que le point P ou DP rencontre if, tombe ſur le point D, l'arc oDn ne ſauroit être circulaire; car de quel côté ſeroit ſitué ſon centre? ſeroit-ce en p ou en P? Mais il n'y a pas plus de raiſon pour le placer en p que pour le placer en P; & comme il ne peut pas être de deux côtés de la tangente b D, il eſt clair que cet arc n'eſt pas circulaire (**). Cela s'accorde avec ce qu'on a démontré dans la premiere Partie & ci-deſſus (102), que la courbure au ſommet des paraboles, ſi on excepte la vulgaire, n'étoit pas circulaire. Ainſi lorſqu'on trouve que le rayon oſculateur correſpondant à un point d'une branche

(*) Il y a des cas où l'on peut ſuppoſer qu'un arc de cercle d'un rayon infini eſt une ligne droite égale à ſa tangente; car il eſt viſible qu'en ſuppoſant l'arc D n fini, & ſon rayon infini, la différence entre cet arc & ſa tangente D b ne peut être qu'inaſſignable; donc on peut, ſans erreur, ſuppoſer ces lignes égales.

(**) Si l'on dit que le centre eſt ſur la tangente, cela ne ſe conçoit pas, puiſqu'il faut qu'il y ait une diſtance entre le centre & la tangente; & s'il n'y en a pas, c'eſt alors un point, & non un cercle.

de courbe, eſt $=0$ ou infini, on doit ſeulement conclure qu'il y a dans ce point un point d'inflexion ou de rebrouſſement; mais il n'y aura aucun point d'inflexion ou de rebrouſſement, à moins que les R correſpondans aux points voiſins du point B, auquel l'on a trouvé $R=0$ ou $=\infty$ (il y a cependant un cas dont on parlera dans la ſuite, dans lequel le rayon oſculateur peut étre infini, quoique la courbure ſoit circulaire) ne ſoient de différens ſignes; car (fig. 123) ſi la courbe avoit au point D un point d'inflexion inviſible, c'eſt-à-dire, qu'elle devînt de concave (vers F) convexe, & qu'elle redevînt auſſitôt concave, le point d'inflexion ſeroit inviſible; mais les R aux points voiſins m & M ſeroient de même ſigne. Dans les fig. 119 & 120, les R aux points m & M étant dirigés de différens côtés, ont différens ſignes; mais aux points m & M voiſins du point de rebrouſſement D, les q (fig. 119) auront les mêmes ſignes & différens ſignes aux points m & M (fig. 120).

136. PROBLÊME. *Etant donnée l'équation d'une branche de courbe dont les ordonnées ſont perpendiculaires à l'axe des abſciſſes ou dont les ordonnées partent d'un foyer, trouver ſes points de rebrouſſement & ſes points d'inflexion?* Cherchez R par quelques-unes des formules qu'on a données ci-deſſus, ſelon que les ordonnées ſont rapportées à un axe, ou qu'elles partent d'un foyer. Suppoſez $R=0$ & enſuite $=\infty$, & cherchez x. Mais ſi les ordonnées partent d'un foyer, cherchez ce qui (dans l'équation) repréſente x (*); cherchez enſuite les R par rapport aux points m & M voiſins du point

(*) Cela s'éclaircira par le n° 142.

trouvé D. Si leurs signes sont les mêmes, il n'y aura au point D ni point d'inflexion (*il s'agit d'une inflexion visible*) ni point de rebroussement. Si les signes sont différens, il y aura un point d'inflexion ou un point de rebroussement. Pour distinguer lequel des deux a lieu, on cherchera la valeur de l'angle désigné par q (valeur qu'on appellera q pour abréger) aux points m & M. Si les signes de q sont les mêmes, on aura un point de rebroussement; mais si les signes de q sont différens, l'on aura un point d'inflexion; si le signe de q correspondant à M (fig. 119) est positif, la courbe sera concave vers le bas & convexe vers le haut; si le signe de q par rapport au point m (fig. 122) est négatif, l'arc Dm sera convexe vers le bas & concave vers le haut. Tout cela est évident, en faisant attention à ce qu'on a dit ci-dessus.

137. PROBLÊME. *Trouver les points d'inflexion ou de rebroussement de la branche de courbe dont l'équation est* $y = \sqrt[3]{(a^3 + x^3)}$ *ou* $y^3 = a^3 + x^3$, *car l'une & l'autre équation désigne la même branche, puisqu'à une abscisse il ne peut répondre qu'un seul* y (*).

En différenciant, l'on a $3y^2\,dy = 3x^2\,dx$, ou $y^2\,dy = xx\,dx$, $y^4\,dy^2 = x^4\,dx^2$ & $dy^2 = \frac{x^4\,dx^2}{y^4}$ (P); différenciant l'équation $y^2\,dy = xx\,dx$ en supposant

(*) Si l'on avoit l'équation $y^2 = a^4 + x^4$, l'on auroit $y = \pm\sqrt{(a^4 + x^4)}$, & alors à chaque abscisse il répondroit deux ordonnées; ainsi la courbe auroit deux branches, l'une désignée par l'équation $y = +\sqrt{(a^4 + x^4)}$, l'autre par l'équation $y = -\sqrt{(a^4 + x^4)}$, & il faudroit opérer sur chaque branche en particulier.

posant dx constant, il vient $2ydy^2 + y^2 ddy = 2xdx^2$, & $y^2 ddy = 2xdx^2 - 2ydy^2$, ou $y^2 ddy = 2xdx^2 - \frac{2x^4 dx^2}{y^3}$, en substituant la valeur de dy^2 prise de l'équation P. En ôtant la fraction, on trouve $y^5 ddy = 2xy^3 dx^2 - 2x^4 dx^2$. Si on substitue dans le second membre la valeur de y^3 prise de l'équation de la courbe, l'on aura $y^5 ddy = 2a^3 x dx^2 + 2x^4 dx^2 - 2x^4 dx^2 = 2a^3 x dx^2$, & par conséquent $ddy = \frac{2a^3 x dx^2}{y^5}$. Nous employerons la formule du rayon osculateur $\frac{ds^3}{-dxddy}$ & la valeur de $q = \frac{-dxddy}{ds^2}$ que l'on trouve dans la même supposition, & l'on aura par les valeurs trouvées, $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{x^4 dx^2}{y^4} = \frac{(y^4 + x^4).dx^2}{y^4}$, & $dxddy = \frac{2a^3 x dx^3}{y^5}$; donc $R = \frac{-\sqrt{(y^4+x^4)^3}}{2a^3 xy}$, & $q = \frac{-2a^3 x dx}{y^5 + x^4 y}$.

Si l'on suppose $R = 0$, l'on aura $\sqrt{(y^4 + x^4)} = 0$, ou $y^4 = -x^4$, ou $y = \pm\sqrt{(-x^4)}$, quantité imaginaire; ainsi l'on ne peut pas supposer $R = 0$. Supposant $R = \infty$, l'on a $2a^3 xy = 0$, ou $xy = 0$, dont les facteurs sont $x = 0$ & $y = 0$. Substituant la valeur de $x = 0$ dans l'équation de la courbe, l'on a $y^3 = a^3$, ou $y = a$. Si l'on substitue dans la même équation la valeur de $y = 0$, il vient $x^3 + a^3 = 0$, $x^3 = -a^3$, ou $x = -a$.

On doit donc examiner les points qui répondent à $x = 0$ & à $x = -a$. Pour le premier point, on

ſuppoſera x augmenté ou diminué d'une très-petite quantité f, c'eſt-à-dire, on ſuppoſera $x = 0 \pm f$, ou $x = \pm f$, & l'on aura $y^3 = \pm f^3 + a^3$, ou $y^3 = a^3$, en négligeant f^3, c'eſt-à-dire, que le ſigne de y ne changera pas par cette ſuppoſition. Il eſt évident que ſi dans la valeur de $R = \frac{-\sqrt{(y^4 + x^4)^3}}{2a^3xy}$ l'on met a à la place de y, R deviendra négatif, en ſuppoſant x poſitif (ou $= f$) ; mais R deviendra poſitif, en ſuppoſant x négatif ; donc au point auquel $x = 0$, il y aura un point d'inflexion ou un point de rebrouſſement.

Pour ſavoir lequel des deux a lieu, examinons la quantité q; mais $q = \frac{-2a^3xdx}{y^5 + yx^4}$ devient négatif, en ſuppoſant x poſitif, & poſitif en ſuppoſant x négatif(*) ; donc au point correſpondant à $x = 0$, il y aura un point d'inflexion, & non un point de rebrouſſement.

Quant à ce qui regarde le point auquel $x = -a$, ſi on ſubſtitue $-a + f$ au lieu de x, l'équation de la courbe donne $y^3 = a^3 - a^3 + 3a^2f$ (en négligeant les puiſſances ultérieures de f à cauſe de f infiniment petite) $= 3a^2f$, ou $y = \sqrt[3]{(3a^2f)}$; donc dans ce cas $R = \frac{-\sqrt{(y^4 + x^4)^3}}{-2a^4\sqrt[3]{a^2f}}$, en négligeant dans le dénominateur le terme qui con-

(*) On n'a pas égard à dx qu'on regarde comme ne changeant pas de ſigne, ou qu'on regarde comme ayant le ſigne $+$.

tiendroit f^2. Le numérateur conservera toujours le même signe, quelle que soit la valeur de y, mais le dénominateur deviendra positif, en supposant f négative; donc au point qui répond à $x = -a$, il y aura un point d'inflexion ou un point de rebroussement; mais dans ce cas on a $q = \frac{2a^4 dx}{(y^4+x^4).\sqrt[3]{3a^2f}}$, ou $\frac{q}{dx} = \frac{2a^4}{(y^4+x^4)\sqrt[3]{3a^2f}}$; il est évident que q sera positif, en faisant f positive, & négatif, en supposant f négative; c'est-à-dire, qu'en augmentant x d'une quantité fort petite, l'on aura pour la valeur de q une quantité positive, tandis qu'on aura pour le point que nous appellerons m, correspondant à x augmenté d'une petite quantité négative, une valeur négative de q; donc il y aura au point correspondant à $x = -a$, un point d'inflexion, & non un point de rebroussement.

138. PROBLÊME. *Trouver si dans la courbe désignée par $y = a - x^{\frac{2}{3}}$ il y a un point d'inflexion ou de rebroussement.* De l'équation de la courbe, je tire $dy = \frac{-2}{3} x^{\frac{-1}{3}}. dx$, $ddy = \frac{2}{9}. x^{-\frac{4}{3}}. dx^2$, en supposant dx constant; donc $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2. (1 + \frac{4}{9}. x^{-\frac{2}{3}})$, & $dxddy = \frac{2}{9}. x^{-\frac{4}{3}}. dx^3$;

donc $R = \frac{-ds^3}{dxddy} = \frac{-(1+\frac{4}{9}.x^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{9}.x^{-\frac{4}{3}}}$

$= -\frac{9}{2}.(1 + \frac{4}{9x^{\frac{2}{3}}})^{\frac{3}{2}}. x^{\frac{4}{3}}$. Multipliant la quantité sous le signe $\frac{3}{2}$ par $9. x^{\frac{2}{3}}$, & divisant hors du signe

par $(9.x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = 27x$ (*), l'on aura $-\frac{9}{2}.\frac{(9.x^{\frac{2}{3}}+4)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{4}{3}}}{27x}$

$$= \frac{-(9.x^{\frac{2}{3}}+4)^{\frac{3}{2}}.x^{\frac{1}{3}}}{6} = R.$$

Si l'on ſuppoſe cette quantité $= 0$, l'on aura $x = 0$, & ſuppoſant x poſitif & ſi petit qu'on voudra, le rayon R devient négatif, mais R devient poſitif, en ſuppoſant x négatif : ce qu'il eſt aiſé de voir ; car en ſuppoſant x infiniment petit, l'on a dans ce cas $R = \frac{-x^{\frac{1}{3}}(4)^{\frac{3}{2}}}{6} = \frac{-\sqrt{(4)^3}\sqrt[3]{x}}{6}$; or la quantité $\sqrt[3]{x}$ eſt poſitive, ſi x eſt poſitif, & négatif, ſi x eſt négatif ; donc au point de la branche auquel $x = 0$, il y aura un point d'inflexion ou un point de rebrouſſement.

Pour ſavoir lequel des deux a lieu, je cherche q, qui dans ce cas devient $q = \frac{-dx\,ddy}{dx^2+dy^2}$ $= \frac{-\frac{2}{9}.x^{\frac{-4}{3}}.dx}{1+\frac{4}{9}.x^{\frac{-2}{3}}}$. Cette quantité eſt toujours négative, que x ſoit poſitif ou négatif & ſi petit que l'on voudra ; donc au point correſpondant à $x = 0$, il y aura un point de rebrouſſement & non un point d'inflexion ; & parce que de part & d'autre de ce point, q eſt négatif, les branches ſeront convexes vers le bas, & la pointe ſera tournée, comme on le voit dans la fig. 122, le point D étant éloigné de l'axe des x de la quantité $AD = a$; car au point A, auquel $x = 0$, l'on a $y = a$.

Si l'on ſuppoſe $R = \infty$, l'on a $6 = 0$, ce qui étant abſurde, cette ſuppoſition ne peut avoir

(*) Car le cube de 9 eſt 729, dont la racine eſt $= 27$; le cube de $x^{\frac{2}{3}}$ eſt $= x^{\frac{6}{3}} = x^2$, dont la racine $= x$.

lieu. Et de même si en supposant R = 0 l'on trouvoit une équation absurde, l'on n'auroit ni point d'inflexion ni point de rebroussement.

Par exemple, si l'on avoit $y = x^n$, n étant un nombre entier pair & positif > 2, l'on auroit $dy = n.\ x^{n-1}.\ dx$, $ddy = [n.(n-1).x^{n-2}]\ dx^2$, $dx^2 + dy^2 = ds^2 = dx^2.\ (1 + n^2\ x^{2n-2})$, & $-dx\,ddy = [-n.(n-1).\ x^{n-2}]\ dx^3$; donc $R = \frac{-\sqrt{(1+nnx^{2n-2})^3}}{n.(n-1).x^{n-2}}$. Si l'on fait R = 0, l'on aura $1 + n^2\ x^{2n-2} = 0$, $n^2.\ x^{2n-2} = -1$, $x^{2n-2} = -\frac{1}{nn}$, $x^{n-1} = \pm\sqrt{\frac{-1}{nn}}$, quantité imaginaire qui fait voir qu'on ne peut supposer R = 0.

Si on suppose $R = \infty$, l'on a $n.\ (n-1).x^{n-2} = 0$, ou $x = 0$, ce qui semble promettre un point d'inflexion ou de rebroussement (*). En substituant $0 + f = f$ au lieu de x, le rayon R sera négatif, qu'on prenne f négative ou positive; donc dans ce cas il n'y a ni point d'inflexion ni point de rebroussement. Mais en supposant que n est un nombre impair entier > 1, R sera négatif, si f est positive, & positif, si f est négative. Il y aura donc alors un point d'inflexion ou un point de rebroussement correspondant à $x = 0$; mais $q = \frac{(-nn+n)x^{n-2}dx}{1+n^2x^{2n-2}}$

(*) Si $n = 2$, l'on aura $x^{n-2} = x^0 = 1$, & dans ce cas le dénominateur ne peut pas être supposé = 0, & de plus R sera toujours négatif, quel que soit x positif ou négatif; donc dans ce cas la courbe a par-tout sa convexité tournée vers le bas ou vers ses abscisses. Si on suppose que n est $= -4$, dans ce cas au point correspondant à $x = 0$, l'on aura R = 0, avec un point de rebroussement formé par deux branches asymptotiques de la courbe qui ont pour tangente commune l'ordonnée infinie correspondante à $x = 0$; mais il ne s'agit pas ici des points des courbes considerées dans un espace infini. On ne sauroit supposer $n = 1$, parce que l'équation $y = x$ seroit alors à la ligne droite.

devient négatif, en ſuppoſant $x = +f$, & poſitif, en ſuppoſant $x = -f$; car dans ce cas $n - 2$ eſt un nombre impair & $2n - 2$ un nombre pair; donc au point correſpondant à $x = 0$, il y a dans ce cas un point d'inflexion.

Les points ſinguliers dont nous venons de parler, ne ſont pas les ſeuls que les Géomètres conſiderent dans les courbes. On peut s'occuper encore des points qu'on appelle d'*inflexion inviſible*. Par exemple ſi (fig. 124) la courbe Am a un point d'inflexion en m & un autre en M de maniere qu'elle ſerpente en devenant en m de concave convexe, & en M de convexe concave vers l'axe AB, ſi les points M, o, M ſont ſuppoſés infiniment proches, & en ligne droite (fig. 125), alors la courbe paroîtra par-tout concave, & le point d'inflexion en m ſera inviſible, les arcs infiniment petits mo, Mo (fig. 124) tomberont l'un & l'autre ſur la ligne miM, & au lieu de la courbe AmoM, l'on aura la courbe Aim qui n'aura aucun *point d'inflexion viſible*, & dans laquelle la petite ligne miM, qui (fig. 125) devient moM, pourra être regardée comme une ligne droite. L'on appelle ces ſortes de points d'inflexion inviſible *des points de ſerpentement*; & toutes les courbes déſignées par l'équation $y = x^n$, n étant un nombre pair plus grand que 2, auront un point de ſerpentement correſpondant à l'abſciſſe $x = 0$. De même la courbe de l'équation $by^3 = (a + x)^4$ a un point de ſerpentement correſpondant au point déſigné par $x = -a$.

139. PROBLÊME. *Trouver les points de ſerpentement d'une courbe algébrique dont les ordonnées ſont parallèles & perpendiculaires aux abſciſſes.* On pourra chercher les points auxquels le rayon oſculateur

R eſt $= 0$; ou $= \infty$; ſi à quelqu'un de ces points, ainſi trouvés, il n'y a ni point d'inflexion ni point de rembrouſſement (*), c'eſt-à-dire, ſi les rayons R correſpondans aux points voiſins ſitués l'un d'un côté, l'autre de l'autre des points ainſi trouvés ſont de même ſigne, l'on aura un point de ſerpentement pour chaque point auquel cela arrivera. Ainſi pour les courbes dont l'équation eſt $y = x^n$, n étant un nombre pair poſitif > 2, l'on aura un point de ſerpentement correſpondant au point auquel $x = 0$.

140. REMARQUE. Si on ſuppoſe $= b$, la valeur de l'abſciſſe x correſpondante à $R = 0$, ou à $R = \infty$; & qu'en ſubſtituant $b + f$ au lieu de x l'on trouve le rayon R imaginaire, c'eſt une marque que la branche ſe termine au point correſpondant à $x = b$; c'eſt la même choſe, ſi le rayon R correſpondant à f négative, eſt imaginaire; c'eſt-à-dire, que la branche n'exiſte que du côté correſpondant au rayon R réel, & alors il y a un point de rebrouſſement qui eſt formé par le concours de deux branches qui ſe terminent au même point, & dont nous parlerons bientôt.

Si l'on cherche le rayon oſculateur correſpondant au point B de la cycloïde AmB (fig. 126), on trouvera ce rayon $= 0$. Mais ſi le cercle générateur, après avoir décrit la cycloïde AmB, continue de tourner, il décrira une autre cycloïde BCb, & ainſi de ſuite, & toutes ces cycloïdes pourront ſe continuer tant du côté du point A que du côté du point b; de ſorte qu'elles ne for-

(*) On ſuppoſe que x & y ſont des quantités finies ou 0 ; & il n'eſt pas queſtion de la figure de la courbe à une diſtance infinie.

meront qu'une ſeule & même courbe compoſée d'une infinité d'arcs cycloïdaux, tels que AmB, BCb, &c. Les arcs AmB, BCb, en ſe joignant au point B, formeront évidemment un point de rebrouſſement de la premiere eſpéce; mais il ne s'agit ici que des points de rebrouſſement des courbes algébriques. On peut remarquer qu'en prenant PM troiſiéme proportionnelle aux ordonnées Pm de la cycloïde & à la ligne Aa = a, l'on aura une courbe compoſée d'une infinité d'arcs tels que NMn, & chacun de ces arcs aura deux branches aſymptotiques; mais tous ces arcs appartiendront à une ſeule & même courbe.

En général la courbe conſidérée au point auquel R = 0, ou R = ∞ aura dans ce point une courbure égale à celle du ſommet d'une parabole différente de la parabole vulgaire, & ce ſera toujours un point ſingulier. Au reſte l'on peut conſulter ce que nous avons dit ſur cette matiere dans la premiere Partie de cet Ouvrage. On y verra comment on détermine la multiplicité du point d'inflexion, ſoit viſible, ſoit inviſible [voyez Courbes Algébriques n°. 63] (*).

(*) Si une certaine valeur de x ou de y donnoit R = $\frac{0}{0}$, on ſubſtitueroit cette valeur dans l'équation de la courbe, & l'on verroit ſi par cette valeur de x on trouve y réel ou réciproquement, ou bien ſi ces valeurs de x & de y rendent l'équation de la courbe = 0, en ſuppoſant tous les termes d'un ſeul côté. Suppoſons que cette valeur ſoit = 1, & qu'en faiſant $x = 1 + f$ l'on trouve y imaginaire, quelle que ſoit f poſitive ou négative, dans ce cas on a un point conjugué détaché du reſte de la courbe, pourvu que l'ordonnée correſpondante à $x = 1$ ſoit réelle. C'eſt ce que l'on peut voir dans la courbe dont l'équation eſt $y^4 + x^4 = 4xy - 2$, qui a un point conjugué correſpondant à $x = 1$ & à $y = 1$; on a parlé ci-deſſus (96) de cette courbe.

141. Mais passons aux points d'inflexion & de rebroussement dans les courbes dont les ordonnées partent d'un point. Pour cela, rappellons-nous que dans ces courbes l'on a (103) $R = \frac{y\,ds^3}{dx^3 + dx\,dy^2 + y\,dy\,ddx - y\,dx\,ddy}$, & (135) $q = \frac{dx.ds^2 + y\,dy\,ddx - y\,dx\,ddy}{y\,ds^2}$. Comme dx désigne un petit arc décrit d'un rayon variable y, lequel arc est la mesure d'un angle, si l'on veut avoir l'arc dz qui soit la mesure de cet angle, en supposant que le rayon fait $= 1$, l'on fera $y : dx :: 1 : dz$, d'où l'on tire $y\,dz = dx$. Substituant cette valeur de dx dans R & q, se rappellant que $ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$, faisant attention que $ddx = dy\,dz + y\,ddz = dy\,dz$ en supposant dz constant; & réduisant, il vient $R = \frac{(dy^2 + y^2\,dz^2)^{\frac{3}{2}}}{2\,dy^2\,dz + y^2\,dz^3 - y\,dz\,ddy}$, & $q = \frac{2\,dy^2\,dz + y^2\,dz^3 - y\,dz\,ddy}{dy^2 + y^2\,dz^2}$.

Si l'on a une courbe Ci (fig. 127), dans laquelle on fasse le rayon CA $= a$ est à la circonférence APD $= c$, comme le rayon C$i = y$ est à l'abscisse circulaire AP $= z$, ou $a : c :: y : z$, ou $az = cy$, l'on aura l'équation de la spirale d'Archimede. Si l'on fait $a = 1$, $\frac{1}{c} = b$, & $b : 1 :: y : z^n$, ou $y = b\,z^n$, l'on aura une infinité de spirales. Si a ne désignoit point l'unité & que l'on eût $a^r : c^m :: y^r : x^m$, ou $y^r = \frac{a^r}{c^m}\,x^m$, ou en faisant $\frac{m}{r} = n$, & $\frac{a^r}{c^m} = b^r$, l'on auroit $y = b\,x^n$. Si l'on

faisoit $a : 1 :: x : z$, l'on auroit $x = az$; & substituant cette valeur de x au lieu de x dans l'équation $y^r = \frac{a^r}{c^m} x^m$, la courbe seroit rapportée à un cercle dont le rayon seroit $= 1$. Dans l'équation $y = bz^n$, z est la quantité qui représente x, & c'est de cette quantité qu'il faut dans ce cas entendre ce que nous avons dit (136).

142. PROBLÊME. *Trouver les points d'inflexion & de rebroussement des spirales représentées par l'équation $y = bz^n$, z étant un arc de cercle décrit d'un rayon $= 1$.* L'on aura $dy = nbz^{n-1}dz$; & supposant dz constant, $ddy = n.(n-1).bz^{n-2}dz^2$; donc $dy^2 + y^2dz^2 = dz^2(n^2b^2z^{2n-2} + y^2)$ $= dz^2\left(\frac{n^2b^2z^{2n} + y^2z^2}{z^2}\right) = \frac{y^2dz^2}{z^2}.(n^2 + z^2)$, en substituant y^2 au lieu de b^2z^{2n}; donc $(dy^2 + y^2dz^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{y^3dz^3}{z^3}(n^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$. L'on a aussi $2dy^2dz + y^2dz^3 - ydzddy = 2n^2b^2z^{2n-2}dz^3 - (n^2 - n)byz^{n-2}dz^3 + y^2dz^3$, qui, à cause de $y = bz^n$, peut se changer en $\frac{2n^2y^2dz^3}{z^2} - (n^2 - n).\frac{y^2dz^3}{z^2} + y^2dz^3$ $= (n^2 + n + z^2)\frac{y^2dz^3}{z^2}$; donc R $= \frac{y.(n^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}{z.(n^2 + n + z^2)} = \frac{bz^{n-1}(n^2 + zz)^{\frac{3}{2}}}{n^2 + n + z^2}$, parce que de l'équation $y = bz^n$, l'on tire $\frac{y}{z} = \frac{bz^n}{z}$

$= b z^{n-1}$. L'on a aussi $q = \frac{dz.(n^2+n+z^2)}{n^2+z^2}$.

Si on suppose que n est un nombre positif, on voit que q sera toujours positif; donc les spirales comprises dans l'équation $y = b z^n$ n'ont dans ce cas aucun point d'inflexion, mais elles sont toujours concaves vers leur foyer. Si on suppose $n = 1$, comme dans la spirale d'Archimede, l'on a $R = \frac{b.\sqrt{(1+zz)^3}}{2+zz}$, quantité toujours positive (*) & qui ne peut être supposée $= 0$, ou $= \infty$.

Car dans le premier cas on auroit $zz + 1 = 0$, $zz = -1$, & $z = \pm\sqrt{-1}$; dans le second cas on auroit $z = \pm\sqrt{-2}$, c'est-à-dire, que z seroit imaginaire; donc cette spirale ne peut avoir ni point d'inflexion ni point de rebroussement. Si l'on fait $z = 0$, ce qui indique le pôle de la spirale d'Archimede, l'on a $R = \frac{b \times 1}{2} = \frac{b}{2}$, c'est-à-dire, que la courbure au pôle de cette spirale est la même que celle d'un cercle dont le rayon seroit $= \frac{b}{2}$.

Si on suppose z infini, c'est-à-dire, si l'on suppose que la courbe ait fait une infinité de révolutions autour du pôle, l'on a $R = \frac{bz^3}{z^2} = bz = \frac{bz}{1}$, d'où l'on tire $1 : b :: z : R$; c'est-à-dire, qu'alors le rayon osculateur devient infini, & la courbure de la courbe infiniment petite, & la même que celle d'un cercle dont le rayon seroit

(*) Le signe radical se prend toujours ici avec le signe +.

une ligne quatriéme proportionnelle à l'unité, à b & à z; de même dans la parabole ordinaire dont le rayon de la courbure est (104) $= \frac{(yy+aa)^{\frac{3}{2}}}{aa}$ $= \frac{y^3}{aa}$, lorsque $y = \infty$, la courbure est infiniment petite, lorsque le rayon est infiniment grand; mais cependant cette courbure est circulaire. On distingue ces sortes de points, en ce qu'en supposant, soit l'abscisse x, soit l'ordonnée y, comme on voudra, dans le cas de la parabole, ou z dans le cas de la spirale d'Archimede, augmentée ou diminuée d'une petite quantité $\pm f$, le rayon osculateur reste infini dans les deux cas, ce qui n'arrive pas lorsqu'il s'agit d'un point d'inflexion ou de rebroussement, lorsque l'abscisse (courbe ou droite) & l'ordonnée sont toutes les deux finies, ou qu'au moins l'une des deux est finie ou $= 0$. Mais il ne s'agit pas ici des points correspondans à des co-ordonnées infinies.

Si n étant positive est plus grande ou plus petite que 1, R sera toujours $= 0$, ou $= \infty$, lorsque z sera $= 0$, ou lorsque $y = b z^n$ sera $= 0$ (*), c'est-à-dire au pôle. Si l'on suppose z négative, ou z^{n-1} sera une quantité négative ou positive; dans le dernier cas la spirale passe par le pôle à la maniere d'un arc continu.

Telles sont toutes les spirales désignées par les équations $y = b z^3$, $y = b z^5$, $y = b z^7$, &c. Dans le second cas il y a un point de rebroussement au pôle: cela arrive dans toutes les

(*) Car si $n - 1 = -m$, l'on a $b z^{n-1} = b z^{-m} = \frac{b}{z^m} = \infty$, en supposant $z = 0$ & m un nombre positif entier ou fractionnaire.

ſpirales $y = bz^2$, $y = bz^4$, $y = bz^6$ &c. Si z étant négatif, z^{n-1} devient imaginaire, comme ſi l'on avoit $y = bz^{\frac{3}{2}}$, ce qui donne $z^{n-1} = z^{\frac{3}{2}-1} = z^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{-z}}$, en ſuppoſant z négatif; dans ce cas R eſt imaginaire à cauſe de $\sqrt{-z}$ imaginaire, & les ſpirales n'ont aucun point correſpondant aux z négatives. Telles ſont les ſpirales $y = bz^{\frac{3}{2}}$, $y = bz^{\frac{5}{2}} = bz^{\frac{7}{2}}$, &c.; car en ſuppoſant z négatif & $n = \frac{3}{2}$, l'on aura $y = \pm b\sqrt{-z^3}$, quantité imaginaire.

Si n eſt un nombre négatif, dans ce cas il peut y avoir un point d'inflexion. En effet l'on a alors $q = \frac{dz.\,(n^2 - n + z^2)}{n^2 + z^2}$. Cette quantité eſt poſitive, ſi $(n^2 + z^2) > n$, & négative, ſi $(n^2 + zz) < n$. Mais z croiſſant continuellement, ſi au commencement $(n^2 + zz) < n$, il y aura un point auquel $(nn + zz)$ ſera $= n$. Pour que $nn + zz$ puiſſe être plus petit que n, il faut que n ſoit fractionnaire; donc dans ce cas cette partie de la ſpirale qui répond à $(n^2 + zz) < n$, ſera convexe vers le pôle, le reſte de la ſpirale étant concave vers le même pôle.

Si n eſt négative, l'équation $y = bz^{-n}$ devient $y = \frac{b}{z^n}$, ou $z^n = \frac{b}{y}$. Si on ſuppoſe $z = 0$, l'on a $y = \infty$; au contraire pour que y devienne infiniment petit, il faut que z devienne infinie; donc dans ce cas la ſpirale ne peut atteindre le pôle qu'après avoir fait une infinité de révolutions (*).

143. Parlons maintenant des points de rebrouſ-

(*) La fig. 128 peut donner une idée des ſpirales qui paſſent par le pôle C en forme d'arc continu. Si l'on a $y = z^2$,

ſement qui ſont formés par deux branches DM, Dm (fig. 130 & 131), qui quoiqu'appartenantes à une meme courbe, ſont cependant déſignées par des équations différentes. Lorſque les branches ſe tournent leurs convexités, elles forment un *point de rebrouſſement ſimple ou de la premiere eſpèce;* mais *le point de rebrouſſement eſt de la ſeconde eſpèce*, ſi l'une des branches tourne ſa convexité vers la concavité de l'autre, comme il arrive (fig. 131). Les branches MD, mD ſont terminées au point D de rebrouſſement; donc les ordonnées qui répondent à des abſciſſes, priſes en deçà, doivent être imaginaires. Au contraire dans la fig. 132 les ordonnées correſpondantes aux x (Ap), ſituées

AP étant $= + z$ & A$p = - z$, l'on prendra C$m = y$ $= b \times - z^3 = - bz^3$ ſur le prolongement du rayon pC. La figure 129 peut repréſenter les ſpirales des équations $y = bz^3$, $y = bz^4$, &c. Si l'on fait AP = Ap & $n = 2$, l'on aura $z^2 = (-z)^2 = z^2$ & Cm = Ci. La fig. 128. B peut repréſenter celles qui n'ont aucune ordonnée correſpondante aux z négatives. Si on prend le radical pair avec le ſigne $\pm$, & qu'on ait $y = bz^{\frac{3}{2}}$, ou $y = \pm b\sqrt{z^3}$, à chaque abſciſſe AP, il répondra deux ordonnées, l'une poſitive Ci, l'autre négative Co, la courbe aura au pôle C un point ſingúlier dont il ſera facile de connoître la nature, en faiſant attention à la figure, & à la ſituation des arcs qui le forment; & les branches ſeront concaves vers le pôle, puiſque chaque point i & o de la courbe ſera ſitué entre le pôle C & la tangente correſpondante, menée par un autre point infiniment proche de i ou de o.

Mais dans ce cas les ſpirales ont deux branches (déſignées par deux équations différentes) qui ſont toutes les deux terminées au pôle, & en ne conſidérant qu'une ſeule branche, ces courbes ſont terminées au pôle; or dans le problême, on ne conſidere qu'une ſeule branche. Si $n = \frac{5}{2}$, l'on aura $\frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$, & pour ce cas, en ſuppoſant z négatif, z^{n-1} ſera $\sqrt{-z^3}$, quantité imaginaire.

au-delà de A, feront imaginaires. Les rebrouffemens fimples fe trouveront toujours, en cherchant les x que donneront les $R = 0$, ou $= \infty$. Car il eft aifé de voir que fi la fig. 112 etoit fituée comme la fig. 132, à chaque abfciffe AP il répondroit une double ordonnée PM, Pm; de forte que l'équation qui auparavant (fig. 112) défignoit la courbe mDM; de maniere que y étoit une fonction de x, qui ne renfermoit aucun radical pair, en renfermera néceffairement, lorfque cette courbe étant rapportée à l'axe DP, aura la fituation de la fig. 132 ou de la fig. 130. En effet fuppofons que l'équation de la courbe de la fig. 112 foit $y^3 = ax^2 = x^2$, en fuppofant $a = 1$, l'on aura $y = \sqrt[3]{x^2}$; mais en changeant y en x, l'on a $y^2 = x^3$, $y = \pm \sqrt{x^3}$; donc à chaque abfciffe AP ou DP (fig. 130), il répond deux ordonnées, l'une pofitive PM, l'autre négative Pm; & en fuppofant que les DP font pofitifs, l'on aura les D$p = -x$, & les y correfpondans à Dp feront $y = \pm \sqrt{-x^3}$, quantité imaginaire, qui fait voir que les branches de la courbe font terminées en D. Mais que la courbe foit fituée, comme elle l'eft (fig. 112), ou comme dans la fig. 130, le rayon ofculateur correfpondant au point de rebrouffement D, fe trouvera, en fuppofant $R = 0$, ou $R = \infty$. Suppofons que b foit la valeur de x trouvée par l'une de ces fuppofitions, on examinera fi en fubftituant $b + f$ au lieu de x, les R deviennent imaginaires, lorfque f eft pofitive, fans le devenir lorfque f eft négative ou réciproquement, dans ce cas l'on eft fûr d'un point de rebrouffement. Suppofons que f négative rende R imaginaire dans les deux branches défignées par le double figne $\pm$ du radical pair, l'on examinera fi en fuppofant f pofitive, les rayons R correfpondans aux deux

branches ſont l'un poſitif, l'autre négatif; dans ce cas les rebrouſſemens ſeront de la premiere eſpéce. Mais ſi les R étoient alors tous les deux poſitifs, l'on auroit un rebrouſſement de la ſeconde eſpéce, dont les branches auroient la ſituation déſignée par la fig. 131. Si les R étoient tous les deux négatifs, les branches ſeroient ſituées comme dans la fig. 133. Si on trouvoit le rayon R négatif pour une des branches, & poſitif pour l'autre, ce ſeroit une marque que les branches s'uniroient enſemble en D ſous la forme d'un arc continu (fig. 134).

A l'égard des ſpirales qui ont un point de rebrouſſement de la premiere eſpéce au pôle C (fig. 129), nous en avons déja parlé ſuffiſamment.

144. PROBLÊME. *Trouver ſi la courbe de l'équation* $ay^2 = x^3$ *ou* (*en faiſant* $a = 1$) $y^2 = x^3$, *a un point de rebrouſſement de la premiere eſpéce.* Je cherche la valeur de y en x, & j'ai $y = \pm \sqrt{x^3}$; donc $dy = \pm \frac{3}{2}. x^{\frac{3}{2}-1} dx$, $dy^2 = \frac{9}{4}. dx^2 . x^{\frac{6}{2}-2}$

$$= \frac{9}{4}. x dx^2, \; ddy = \pm \frac{3}{4} dx^2 . x^{\frac{-1}{2}} = \pm \frac{3 dx^2}{4\sqrt{x}},$$

$$ds^3 = dx^3 (1 + \tfrac{9}{4} x)^{\frac{3}{2}} = dx^3 . \left(\frac{4+9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{8} dx^3 (4+9x)^{\frac{3}{2}}; \; -dx\,ddy = \mp \frac{3 dx^3}{4\sqrt{x}}.$$

donc $R = \frac{ds^3}{-dx\,ddy} = \mp \frac{1}{3} \sqrt{x} . (4+9x)^{\frac{3}{2}}$.

Si l'on ſuppoſe $x = 0$, l'on a $R = 0$ pour les deux branches déſignées par le double ſigne $\pm$; ſi l'on ſuppoſe x poſitif, R ſera négatif pour la branche $y = + \sqrt{x^3}$, & poſitif pour la branche $y = - \sqrt{x^3}$; donc la premiere a ſa concavité tournée vers le haut, & la ſeconde a ſa concavité tournée vers le bas. Si on ſuppoſe l'abſciſſe x

négative,

négative, le facteur $\sqrt{x}$ devient imaginaire ; donc à x négatif il ne répond aucune branche ni aucun rayon osculateur. La fig. 130 représente la courbe de l'équation $ayy = x^3$; donc la courbe proposée a un point de rebroussement de la premiere espéce.

Pour avoir le rayon osculateur au point D (fig. 131 & 133) de rebroussement de la seconde espéce, on cherchera par l'équation de la courbe la valeur de y en x, & cette valeur renfermera nécessairement un radical pair avec le double signe $\pm$. La quantité renfermée sous le signe deviendra $= 0$ au point D ; la valeur de R sera la méme à ce point, & les signes de R seront les mémes au points M, m des deux branches, en prenant ces points fort proches de D, c'est-à-dire, en ajoutant une petite quantité f à l'abscisse correspondante au point D, pourvu que f positive seulement ou f négative seulement, rende P imaginaire.

La résolution du probléme suivant suffira pour faire comprendre comment on peut s'y prendre pour trouver ces sortes de rebroussemens, lorsque les ordonnées sont perpendiculaires aux abscisses.

145. PROBLÊME. *Trouver si la courbe de l'équation* $y = a + x^2 \pm x^{\frac{5}{2}}$, *ou* $y = a + x^2 \pm \sqrt{x^5}$ *a un point de rebroussement de la seconde espéce.* Je cherche le rayon osculateur des deux branches de cette courbe. J'ai d'abord $dy = 2x\,dx \pm \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} dx$, $ddy = 2dx^2 \pm \frac{15}{4} x^{\frac{1}{2}} dx^2$ (en supposant dx constant), & $dy^2 = (4x^2 \pm 10x^{\frac{5}{2}} + \frac{25}{4} x^3)$; donc $ds^3 = (dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} = dx^3 (1 + 4x^2 \pm 10x^{\frac{5}{2}} + \frac{25}{4} x^3)^{\frac{3}{2}}$, $- dx\,ddy = dx^3 (-2 \mp \frac{15}{4} x^{\frac{1}{2}})$,

$$R = \frac{ds^3}{-dxddy} = \frac{(1 + 4x^2 \pm 10x^{\frac{5}{2}} + \frac{25}{4}x^3)^{\frac{3}{2}}}{-2 \mp \frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}}}.$$

Les signes supérieurs appartiennent à la branche supérieure de la courbe & les inférieurs à la branche inférieure. Maintenant si la courbe a un point de rebroussement de la seconde espéce, il doit étre situé au point auquel l'on a $+\sqrt{x^5} = -\sqrt{x^5}$, ou auquel $x = 0$. Or à ce point l'on a $R = \frac{1}{-2}$ pour les deux branches; donc chacune de ces branches a dans ce point une courbure égale à celle d'un cercle dont le rayon seroit $= \frac{1}{2}$. Le signe — indique que les branches tournent leur concavité vers le haut. Si on suppose $x = -f$, la quantité $x^{\frac{5}{2}} = \sqrt{x^5}$, devient $= \sqrt{-f^5}$, quantité imaginaire; de même $x^{\frac{1}{2}}$ devient imaginaire, & il est aisé de voir que le rayon R correspondant est alors imaginaire. Si l'on suppose $x = +f$, f étant une quantité fort petite, le numérateur sera positif pour les deux branches, le dénominateur étant négatif. Il le sera aussi pour la branche inférieure, tant que $-2 + \frac{15}{4}.x^{\frac{1}{2}}$ sera négatif, ou tant que $15x^{\frac{1}{2}}$ sera < 8, ou $x^{\frac{1}{2}} < \frac{8}{15}$, ou $x < (\frac{8}{15})^2 = \frac{64}{225}$; donc la courbe proposée a un point de rebroussement de la seconde espéce.

La fig. 133 représente la courbe proposée; mais on doit faire $AD = a$. Il peut arriver que les branches DM, Dm d'une courbe qui a un point de rebroussement de la seconde espéce, ayent aussi quelque point singulier que l'on trouvera pour chacune de ces branches par la méthode ci-dessus. En général quelle que soit la grandeur du rayon oscu-

lateur correſpondant au point D, en cherchant R pour les points *m* & M fort proches de D, & dont l'un appartient à une branche, & l'autre à l'autre branche de la courbe, on trouvera facilement de quel côté ces branches tournent leur convexité & l'eſpéce du point de rebrouſſement

Si au lieu de l'équation $y = a + x^2 \pm \sqrt{x^5}$ l'on avoit eu $y = a + (x - c)^2 \pm \sqrt{(x - c)^5}$, en faiſant $x - c = z$, l'on auroit eu $y = a + z^2 \pm \sqrt{z^5}$, & parce qu'au point cherché la quantité qui eſt ſous le ſigne $\pm \sqrt{z^5}$ doit être $= 0$, on auroit $x - c = 0$, $x = c$; & il eſt aiſé de voir qu'on ne peut ſuppoſer $x < c$, autrement $\sqrt{(x-c)^5}$ ſeroit imaginaire. L'on trouveroit de même que la courbe a un point de rebrouſſement de la ſeconde ſorte au point déſigné par $z = 0$, ou $x = c$.

Si les x & les y étoient mêlés enſemble, on chercheroit y en x, en regardant y comme l'inconnue.

REMARQUE. Selon M. le Marquis de l'Hôpital (analyſe des infiniment petits, n°. 109), pour avoir ces ſortes de points, l'on doit différencier l'expreſſion générale du rayon oſculateur. Cette différence étant égalée à o, donne $ddy. (dx^2 + dy^2) - 3dyddy^2 = 0$ (en faiſant dx conſtant). Au point cherché, ſelon l'Auteur dont on vient de parler, l'on doit faire cette quantité $= 0$ ou $= \infty$, & regarder le rayon oſculateur correſpondant comme un *maximum* ou un *minimum* (*). Mais il eſt aiſé de voir que cette méthode, qui doit ordinairement entraîner des calculs très-pénibles, ne peut faire diſtinguer un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpéce d'un point auquel une courbe a un *maximum* ou un *minimum* de rayon oſculateur. De plus une courbe peut avoir des rayons oſculateurs qui ſoient des *maxima* ou des *minima*, ſans avoir aucun point de rebrouſſement de la

(*) M. le Marquis de l'Hôpital ne fait aucune application de ſa méthode.

seconde espéce, & la méthode de ce grand Géomêtre ne peut faire distinguer une courbe qui a un tel point de rebroussement de celle qui n'en a pas.

REMARQUE II. Si l'on vouloit avoir les points de rebroussement de la premiere ou de la seconde espéce d'une courbe rapportée à son foyer, voici comment on pourroit s'y prendre. Soit, par exemple, la courbe $y = a + z^2 \pm z^{\frac{5}{2}}$, en supposant que z est un arc de cercle dont le rayon $= 1$, on feroit attention qu'à cause de $z^{\frac{5}{2}} = \sqrt{z^5}$, z ne peut être négative; ainsi si cette courbe a un point de rebroussement, elle doit l'avoir au point correspondant à $z = 0$, ou à $y = a$; en second lieu on chercheroit la valeur générale de R; on examineroit si au point dont on vient de parler R est $= 0$, ou $= \infty$, ou si R est une quantité finie. On examineroit aussi ce que devient R, en faisant $z = + f$, f étant une quantité fort petite. Si les signes de R sont les mêmes pour les deux branches, l'on a un point de rebroussement de la seconde espéce, & les deux branches sont concaves ou convexes vers le foyer, selon que les signes de R sont à la fois positifs ou négatifs; si les signes sont différens, & que $R = 0$, ou $= \infty$, l'on a un point de rebroussement de la premiere espéce.

146. PROBLÊME. *Trouver si la courbe dont l'équation est $y = a \pm \sqrt{z^5}$ rapportée a un foyer, & z étant un arc de cercle dont le rayon $= 1$ a un point de rebroussement, & de quelle espéce il est.* L'on aura $dy = \pm \frac{5}{2} z^{\frac{3}{2}} dz$, $dy^2 = \frac{25}{4} z^3 dz^2$, $ddy = \pm \frac{15}{4} z^{\frac{1}{2}} dz^2$, en supposant dz constant; substituant ces valeurs de y, dy, ddy dans la formule ci-

deſſus $R = \frac{(dy^2 + y^2 dz^2)^{\frac{3}{2}}}{2dy^2 dz + y^2 dz^3 - ydz\,ddy}$, l'on a $R = \frac{(\frac{25}{4}z^3 + aa \pm 2az^{\frac{5}{2}} + z^5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{25}{2}z^3 + aa \pm 2a\sqrt{z^5} + z^5 \mp \frac{15}{4}a\sqrt{z} - \frac{15}{4}z^3}$. Si l'on fait z négatif, R deviendra imaginaire; ſi l'on fait $z = +f$, f étant ſuppoſée aſſez petite pour que tous les termes qui ſont affectés de z diſparoiſſent devant aa, l'on aura $R = \frac{a^3}{aa} = a$; ce ſera la même choſe, ſi on ſuppoſe $z = 0$; donc la courbe propoſée a un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpéce; les branches de la courbe tournent leur concavité vers le foyer, & leur courbure au point de rebrouſſement eſt la même que celle d'un cercle dont le rayon ſeroit $= a$.

Pour décrire cette courbe, je décris (fig. 135) un cercle AP avec le rayon $AC = 1$; je prends $CD = a$, tirant enſuite une ligne indéfinie CP, je fais $AP = z$, $CM = a + \sqrt{z^5}$; $Cm = a - \sqrt{z^5}$, les points m & M appartiennent à la courbe.

147. PROBLÊME. *Chercher ſi la courbe de l'équation* $y = a \pm z^{\frac{7}{2}}$ *a un point de rebrouſſement de la premiere ou ſeconde eſpéce au point déſigné par* $z = 0$, *la courbe eſt rapportée à un foyer, &* z *eſt un arc décrit avec un rayon* $= 1$. Cherchez les valeurs de y, dy^2, ddy, ſubſtituez-les auſſi bien que la valeur de dy dans la formule qui convient à ce cas, en faiſant dz conſtant, il viendra

$$R = \frac{(\frac{49}{4}z^5 + aa \pm 2az^{\frac{7}{2}} + z^7)^{\frac{3}{2}}}{\frac{49}{2}z^5 + aa \pm 2az^{\frac{7}{2}} + z^7 \mp \frac{35}{4}az^{\frac{3}{2}} - 35z^5}.$$

Si l'on fait z négative, R devient imaginaire; ſi l'on fait $z = 0$, l'on a $R = \frac{a^3}{aa} = a$. Si l'on ſuppoſe

$z = f$, f étant une quantité positive très-petite, le numérateur & le dénominateur de la valeur de R restent positifs; donc la courbe a un point de rebroussement de la seconde espéce, & les deux branches de la courbe ont leur concavité tournée vers le foyer (*).

Mais si l'équation de la courbe étoit $y = \frac{zz}{a}$, la spirale M C i (fig. 129) auroit un point de rebroussement de la premiere espéce situé au pôle C; & soit qu'on prenne l'arc $z =$ AP, ou $=$ Ap, c'est-à-dire, positif ou négatif, le rayon y sera toujours positif.

Des usages du Calcul différentiel dans l'Algébre.

148. PROBLÈME. *Elever le binome $a + b$ à la puissance m.* L'on sait qu'en élevant $1 + a$ au quarré, au cube, &c. le premier terme sera toujours $= 1$. Cela posé, supposons $(1 + x)^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5$ &c. (**), en prenant les différentielles, l'on aura $m.(1+x)^{m-1}dx = Adx + 2Bxdx + 3Cx^2dx + 4Dx^3dx +$ &c. ou en divisant par dx, $m.(1+x)^{m-1} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3dx$ (P). Cette équation devant avoir lieu, quelle que soit la valeur de x, on peut supposer $x = \frac{1}{\infty}$, ou, si l'on veut, $= 0$, & dans ce cas tous les termes qui

(*) Toutes les paraboles, excepté la vulgaire, ayant le rayon osculateur qui répond à leur sommet $= 0$, ou $= \infty$ (135), il paroît que l'on peut conclure que tout point d'une branche de courbe (dans une espace fini) auquel le rayon osculateur est $= 0$, ou $= \infty$, a une courbure semblable à la courbure au sommet de quelque parabole différente de la vulgaire; mais on sait que toutes les paraboles, excepté la vulgaire, ont à leur sommet un point de rebroussement ou un point d'inflexion (visible ou invisible). Si donc on trouve que le rayon osculateur d'une branche de courbe correspondant à un point donné est $= 0$, ou ∞, & qu'en même temps on ne trouve pour ce point ni point de rebroussement, ni point d'inflexion visible, ne peut-on pas conclure que c'est un point de serpentement?

(**) Cette supposition est possible, puisque les coefficiens indéterminés, A, B, C, D, &c. peuvent représenter des quantités quelconques.

ſuivent A s'évanouiſſent ; & en diviſant par m, l'on a $(1+x)^{m-1}$ ou $(1+o)^{m-1} = \frac{A}{m}$ ou $1 = \frac{A}{m}$; donc $A = m$. Différenciant l'équation P, l'on a $m.(m-1).(1+x)^{m-2} \times dx = 2Bdx + 6Cxdx + 12Dx^2dx +$ &c ; diviſant par dx, & ſuppoſant $x = o$, l'on a $m.(m-1) = 2B$, ou $B = \frac{m.(m-1)}{2}$. En continuant de même, l'on trouvera $C = \frac{m.(m-1).(m-2)}{6} = \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}$. $D = \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1.2.3.4}$, & ainſi de ſuite. Maintenant ſi l'on fait attention que $(a+b)^m = a^m(1+\frac{b}{a})^m$, & qu'on ſuppoſe $\frac{b}{a} = x$, l'on aura $(1+x)^m = (1+\frac{b}{a})^m = 1 + m\frac{b}{a} + \frac{m.(m-1)}{1.2} \times \frac{b^2}{a^2} +$ &c. & $1(+\frac{b}{a})^m\ a^m = (a+b)^m = a^m + m\frac{ba^m}{a} + \frac{m.(m-1)}{1.2}. \frac{b^2a^m}{a^2} +$ &c. $= a^m + mb\,a^{m-1} + \frac{m.(m-1)}{1.2} \times b^2 a^{m-2} + \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3} b^3 a^{m-3} +$ &c. (*). Si on vouloit avoir la valeur de $(a-b)^m$, on mettroit le ſigne — devant tous les termes de rang pair, c'eſt-à-dire, qu'on feroit le ſecond, le quatriéme, le ſixiéme, &c. termes négatifs, parce que b s'y trouve avec un expoſant impair ; or une puiſſance impaire d'une quantité négative eſt négative : donc $(a-b)^m = a^m - m\,b\,a^{m-1} + \frac{m.(m-1)}{1.2} b^2 \times a^{m-2} -$ &c.

La méthode que l'on vient de donner pour élever un binome à la puiſſance m, ſuppoſe que m eſt un nombre ra-

(*) C'eſt la formule qu'on a trouvée dans l'Algébre par un calcul bien plus pénible.

tionnel positif ou négatif, entier ou fractionnaire, & il est alors facile de voir que $d.(1+x)^m = m.(1+x)^{m-1}$, indépendamment de la démonstration qu'on en a donnée ci-dessus. En effet de ce que la différence de x^2 est $2x^{2-1}dx$, celle de x^3 étant $3x^{3-1}dx$, &c. on peut conclure par analogie que celle de x^m est $m.x^{m-1}dx$, & que celle de $(1+x)^m$ est $m.(1+x)^{m-1}dx$, m étant un nombre entier ou fractionnaire positif ou négatif.

Mais pour démontrer rigoureusement que la même chose a lieu en supposant que m est un nombre quelconque & même sourd, tel que $\sqrt[5]{3}$, mettons dans le binome $a+b$, x au lieu de a. Cela posé, je dis que l'on aura $(x+b)^m = x^m + mx^{m-1}b + \frac{m.(m-1)}{2}x^{m-2}b^2 + \frac{m.(m-1).(m-2)}{2.3}x^{m-3} \times b^3$ &c. en supposant même que m est un nombre irrationel. Supposons que L désigne le logarithme hyperbolique & que l'on ait $L.(x+b)^m$ ou $mL.(x+b) = L.(x^m + mx^{m-1}b + \frac{m.(m-1)}{2}x^{m-2}b^2 +$ &c.). Prenez les différentielles de ces logarithmes, en supposant x variable & b constant, vous aurez $\frac{m.dx}{x+b}$ (*) $=$

$$\frac{mx^{m-1}dx + m.(m-1)bx^{m-2}dx + \frac{m.(m-1).(m-2)b^2}{2}x^{m-3} + \&c}{x^m + mbx^{m-1} + \frac{m.(m-1).b^2x^{m-2}}{2} + \&c.}$$

Multipliant le numérateur mdx par $x^m + mbx^{m-1} +$ &c. & le second membre par $x+b$, ou, ce qui revient au même, ôtant les fractions, il vient $mx^m dx + m^2bx^{m-1}dx + \frac{m^2(m-1)}{2}b^2x^{m-2}dx +$ &c. $= mx^m dx + m.(m-1) \times bx^{m-1}dx + \frac{m.(m-1).(m-2)}{2}.b^2x^{m-2}dx +$

(*) La différentielle d'une quantité logarithmique, selon ce qu'on a vu ci-dessus, est égale à la différentielle de cette quantité divisée par la quantité elle-même.

&c. (*) $+ mbx^{m-1}dx + m.(m-1)b^2x^{m-2}dx +$ &c. En réduisant dans le second membre les termes semblables en une somme, l'on a $mx^m dx + m.mbx^{m-1}dx + \frac{m^2.(m-1).b^2x^{m-2}dx}{2}$ + &c. quantité identique avec le premier membre; donc la supposition d'où l'on a déduit cette derniere équation est vraie : car en rétrogradant, l'on peut revenir à l'équation $(x+b)^m = x^m + mx^{m-1}b + \frac{(m.m-1)}{2}b^2x^{m-2}$ &c. donc en substituant a au lieu de x, l'on aura $(a+b)^m = a^m + mba^{m-1} + \frac{m.(m-1)}{1.2}b^2a^{m-2}$ + &c. en supposant même que m est un nombre irrationel.

Usage du Calcul différentiel dans la recherche des racines des équations.

149. Soit supposée l'équation $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4}$ — &c. $= 0$ (M), dont les racines soient p, q, r, s, t, &c. de maniere que p soit la plus petite, q celle qui vient après & ainsi de suite. Supposons que toutes les racines de l'équation proposée sont réelles, & regardons-les comme inégales, & s'il y en a d'égales, supposons que leur différence est infiniment petite. Par la nature des équations, la proposée ne peut être $= 0$, à moins que x n'ait pour valeur quelques-unes des racines p, q, &c. Supposons en général que $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2}$ &c. est $= z$; & imaginons qu'au lieu de x on substitue dans la fonction z différentes valeurs déterminées à commencer depuis $-\infty$, en allant vers les nombres positifs (**), il est visible que z ne deviendra $= 0$ que lorsqu'on substituera p, ou q, ou r, &c. au lieu de x, & qu'auparavant z acquerera différentes valeurs plus grandes ou plus petites que o. En prenant des valeurs plus grandes que p & plus petites que q, les valeurs de z

(*) On doit multiplier tout le numérateur du second membre par x & encore de nouveau par b.

(**) On considere ici les quantités négatives comme plus petites que o.

seront positives ou négatives jusqu'à ce qu'on substitue q au lieu de x, & alors l'on aura $z = 0$: mais les valeurs de z n'ont pu passer de o à o, à moins que dans cet intervalle z n'ait eu pour valeur un *maximum* ou un *minimum*. Ce sera un *maximum*, si les valeurs de z étoient positives, & un *minimum* (*), si elles étoient négatives, pendant que x a une valeur intermédiaire entre p & q : ce sera la même chose dans le passage de q à r. Mais parce que, comme on l'a dit ci-dessus (81), les *maxima* & les *minima* se suivent alternativement, si z a été un *maximum* entre p & q, elle deviendra un *minimum* entre q & r, ou réciproquement & ainsi de suite.

Donc puisque entre les racines prises deux à deux z a pour valeur un *maximum* ou un *minimum*, le nombre des *maxima* & des *minima* qui sont dans z sera plus petit au moins d'une unité que le nombre des racines réelles, & les *maxima* & les *minima* se suivront de maniere que les premiers seront positifs & les derniers négatifs; réciproquement si la fonction z a un *maximum* ou du moins une valeur positive, en supposant $x = f$, & un *minimum* ou du moins une valeur négative, en faisant $x = g$, il est nécessaire que x passant de f en g, z passe du positif au négatif, & que dans cet intervalle z devienne $= 0$. Donc il y aura une racine contenue entre f & g. Mais cette conclusion n'a lieu qu'en supposant que les *maxima* & les *minima* deviennent alternativement positifs & négatifs; car si z a quelque *minimum* positif, il peut se faire que z passe du *maximum* au *minimum* suivant, sans passer par o.

Au reste il y aura toujours entre deux racines un *maximum* ou un *minimum*, quand même toutes les racines ne seroient point réelles. Mais on ne peut pas conclure qu'entre deux *maxima* ou deux *minima* quelconques il y ait une racine réelle, à moins qu'une des valeurs de z soit positive & l'autre négative.

Si l'on différencie l'équation ci-dessus, & qu'on fasse $dz = 0$, l'on aura $dz = 0 = nx^{n-1}dx - (n-1) \times A x^{n-2} dx + (n-2). B x^{n-3} dx$ &c., ou en divisant par dx, $nx^{n-1} - (n-1). A x^{n-2} + (n-2). B x^{n-3}$ — &c. $= 0$ (P). Les racines de cette équation donneront

(*) On prend ici un nombre négatif pour un *minimum*, dans le sens de M. Euller.

les *maxima* & les *minima* de z, ainsi qu'il suit de ce qu'on a dit ci-dessus sur les *maxima* & les *minima*. Donc les racines de l'équation $\frac{dz}{dx} = 0 = nx^{n-1} - (n-1) \times Ax^{n-2}$ &c. dont le nombre est $= n-1$, seront les *maxima* ou les *minima* de z; & si les racines de l'équation $z = 0$ sont toutes réelles, alors toutes les racines de l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$ seront aussi réelles; car z ayant autant de *maxima* ou de *minima* que $n-1$ contient d'unités (*), il est nécessaire que l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$ ait un égal nombre de racines réelles; donc toutes ses racines sont réelles; donc on peut établir la régle suivante.

Si toutes les racines de l'équation $z = 0$ sont réelles, toutes les racines de $\frac{dz}{dx} = 0$ le seront aussi; d'où il suit réciproquement que si toutes les racines de l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$ ne sont pas réelles, toutes celles de l'équation $z = 0$ ne le seront pas non plus. Mais il peut se faire que toutes les racines de l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$ soient réelles, quoique toutes celles de l'équation $z = 0$ soient imaginaires.

REMARQUE. Si l'on a l'équation $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$ & qu'on fasse $x = \frac{1}{y}$, elle deviendra $\frac{1}{y^3} - \frac{A}{y^2} + \frac{B}{y} - C = 0$, ou $1 - Ay + By^2 - Cy^3 = 0$, & si les racines x de la premiere sont réelles, celles de la seconde qui sont égales à $\frac{1}{x}$ le seront aussi; de ma-

(*) On suppose que les racines de $\frac{dz}{dx} = 0$ sont inégales; s'il y en a d'égales, il faudra faire les exceptions dont on a parlé ci-dessus.

niere que celles d'une de ces équations sont égales à l'unité divisée par celles de l'autre équation, ou que celles de l'une sont les réciproques de celles de l'autre. Réciproquement de l'équation $1 - Ay + By^2 - Cy^3 = 0$, on peut, en substituant $\frac{1}{x}$ pour y, repasser à l'équation $x^3 - Ax^2 +$ &c. $= 0$.

Si l'on substitue $\frac{1}{y}$ au lieu de x dans la proposée M ci-dessus, l'on aura $1 - Ay + By^2 -$ &c $= 0$; différenciant cette équation, divisant par dy & remettant x au lieu de $\frac{1}{y}$, ou $\frac{1}{x}$ au lieu de y, l'on aura, en changeant tous les signes, l'équation P ci-dessous.

Différenciant cette équation & celle qui en résultera, & faisant les opérations nécessaires, l'on aura, en changeant les signes, les équations qu'on voit ici.

(P) $Ax^{n-1} - 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} -$ &c. $= 0$.

(R) $Ax^{n-2} - \frac{2(n-2)}{n-1}.Bx^{n-3} + \frac{3(n-2).(n-3)}{(n-1).(n-2)}.Cx^{n-4} -$ &c. $= 0$.

(S) $Ax^{n-3} - \frac{2(n-3)}{n-1}.Bx^{n-4} + \frac{3(n-3).(n-4)}{(n-1).(n-2)}.Cx^{n-5} -$ &c. $= 0$.

(V) $Ax^{n-4} - \frac{2(n-4)}{n-1}.Bx^{n-5} + \frac{3(n-4).(n-5)}{(n-1).(n-2)}.Cx^{n-6} -$ &c. $= 0$.

Et en général en supposant que m est un nombre entier plus petit que n, l'on aura, en substituant m pour $n-1$, ou $n-2$, ou $n-3$ &c. l'on aura, dis-je, (Z) $Ax^m - \frac{2^m}{n-1} \times Bx^{m-1} + \frac{3m.(m-1)}{(n-1).(n-2)} Cx^{m-2} -$ &c. $= 0$. Or il est évident, par ce qu'on vient de dire, que si toutes les racines de l'équation $z = 0$ sont réelles, toutes celles de l'équation P le seront, toutes celles de l'équation R, de l'équation S, de l'équation V, le seront aussi, & que si l'équation (Z) a des racines imaginaires, la proposée en aura aussi. Si on suppose $m = 2$, l'on aura $Axx - \frac{4}{n-1}.Bx + \frac{6C}{(n-1).(n-2)} = 0$. Si l'on résout cette équation par la méthode ordinaire du second degré, l'on verra aisément que ses racines sont imaginaires

toutes les fois que l'on a $\frac{4B^2}{(n-1)^2} < \frac{6A.C}{(n-1).(n-2)}$ (*); donc en divisant par 4 & multipliant par $(n-1)^2$, l'on aura $BB > \frac{3(n-1).AC}{2(n-2)}$, si toutes les racines de l'équation proposée sont réelles ; autrement il y aura au moins deux racines imaginaires. Si $n = 3$, pour qu'il n'y ait point de racines imaginaires dans la proposée, il faut qu'on ait $BB > 3AC$; si $n = 4$, l'on doit avoir $BB > \frac{3.3}{2.2}.AC$; Si $n = 5$, l'on doit avoir $BB > \frac{3.4}{2.3}.AC$; &c.

Par ce qu'on vient de dire, l'on peut démontrer que si toutes les racines d'une équation $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2}$ &c. $= 0$ sont réelles, il y aura autant de racines positives qu'il y a de changemens de signe, & autant de racines négatives qu'il y a de succession de même signe. Comme nous avons parlé de cette régle dans notre Algébre, il ne sera pas inutile d'en donner ici une démonstration tirée des principes du calcul différentiel.

150. Supposons que l'équation $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} +$ &c. $= 0$ ait toutes ses racines réelles & positives, son équation différentielle $nx^{n-1} - (n-1).Ax^{n-2} + (n-2.Bx^{n-3}$ — &c. $= 0$, aura aussi toutes ses racines réelles & positives, comme il suit de ce qu'on a dit ci-dessus (149), & les racines de celles-ci seront les limites des racines de la proposée ; de maniere par exemple que si les racines de celles-ci sont 20, 15, 10, 7, la proposée aura cinq racines, dont une sera comprise entre ∞ & 20, la seconde entre 20 & 15, la troisiéme entre 15 & 10, la quatriéme entre 10 & 7, la cinquiéme entre 7 & $-\infty$. En effet les valeurs de x vont de $-\infty$ jusqu'à la plus petite racine qui rend la proposée $= 0$, avant que la valeur de z, dont on a parlé ci-dessus (149), devienne un *maximum* ou un *minimum*, c'est-à-dire, avant que l'on ait $x = 7$. Il y aura

(*) Comme on suppose les racines inégales, cette supposition est possible ; si l'on avoit $\frac{4B^2}{(n-1)^2} = \frac{6AC}{(n-1).(n-2)}$, les deux racines de l'équation Ax^2 — &c. $= 0$ seroient égales.

une autre racine entre $x = 7$ & $x = 10$, une autre entre $x = 10$ & $x = 15$, une autre entre $x = 15$ & $x = 20$, & enfin la cinquiéme entre $x = 20$ & $x = \infty$.

Si l'on suppose $x = \frac{1}{y}$, la proposée deviendra $1 - Ay + By^2 - Cy^3 +$ &c. $= 0$, dont toutes les racines seront aussi réelles, mais réciproques ; de maniere que les plus grandes y répondront aux plus petites x, puisque $x = \frac{1}{y}$ & $y = \frac{1}{x}$.

Ces choses supposées, en différenciant la proposée jusqu'à ce qu'on parvienne à une équation du premier degré, l'on aura $x - \frac{1}{n}. A = 0$ (*), dont la racine doit encore être positive ; donc A est une quantité positive ; donc le coefficient du second terme sera $= - A$, comme on l'a supposé, c'est-à-dire, que le second terme aura le signe $-$; donc si le second terme avoit le signe $+$, toutes les racines (**) de la proposée ne seroient pas positives. Si l'équation proposée est supposée se changer en sa réciproque par la substitution de $\frac{1}{y}$ au lieu de x, qu'on la différencie, & qu'après l'avoir divisée par dy l'on remette x en substituant $\frac{1}{x}$ au lieu de y, l'on aura $Ax^{n-1} - 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} -$ &c. $= 0$. Différenciant de nouveau jusqu'à ce qu'on soit parvenu à l'équation Z (ci-dessus 149) ou $Ax^m - \frac{2m}{n-1}. Bx^{m-1} +$ &c. $= 0$, qui, en supposant $m = 1$, devient $Ax - \frac{2}{n-1} B = 0$ dont la racine doit être positive, puisque toutes celles de la proposée le sont par supposition ; B sera une quantité positive. Donc le troisiéme terme de la proposée aura

(*) Si $n = 3$, l'on aura $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$, $3x^2 dx - 2Axdx + Bdx = 0$; divisant par dx & différenciant de nouveau, l'on trouve $3.2x - 2Adx = 0$, ou $3x - A = 0$; ou $x = \frac{1}{3}A$.

(**) On les suppose réelles.

le signe +; donc le premier & le second termes auront des signes différens; donc si ces termes avoient le même signe, il y auroit au moins une racine négative correspondante à la limite indiquée par cette équation, qui sera différente de la limite indiquée par l'équation précédente, parce qu'ici les racines ont été changées une fois en leurs réciproques; d'où l'on conclut que si les trois premiers termes de l'équation avoient les mêmes signes, l'équation auroit deux racines négatives. Si après avoir changé la proposée en $1 - Ay + By^2 - Cy^3 +$ &c. $= 0$ on différencie & & qu'on divise par dy, l'on aura $- A + 2By - 3Cy^2$ + &c. Différenciant cette équation, divisant par $2dy$ & remettant x, il vient $Bx^{n-2} - 3Cx^{n-3} +$ &c. Différenciant cette équation jusqu'à ce qu'on parvienne à une équation du premier degré, l'on trouvera $Bx - \frac{3C}{n-2} = 0$, dont la racine est positive, puisque toutes celles de la proposée le sont; donc le quatriéme terme aura un coefficient $- C$, c'est-à-dire, aura le signe —; donc s'il a le signe + comme le troisiéme, il y aura une racine négative indiquée par une succession du signe + du troisiéme au quatriéme terme; & en général autant qu'il y aura de paires des signes positifs ou négatifs contigus, l'équation aura autant de racines négatives, & il y aura autant de racines positives qu'il y aura de changemens de signes d'un terme à l'autre; donc il y aura autant de racines positives qu'il y aura de variations de signes d'un terme à l'autre. Par exemple si le premier terme & le second ont différens signes, il y aura au moins une racine positive; si le second & le troisiéme ont aussi différens signes, il y en aura deux, &c. si tous les signes sont les mêmes, toutes les racines seront négatives; *& en général si toutes les racines d'une équation sont réelles, elle aura autant de racines positives qu'il y aura de variations de signes, & autant de negatives qu'il y aura de successions de signes dans l'équation.* Cela n'a point lieu quand il y a des racines imaginaires. Passons maintenant aux limites des racines d'une équation.

151. PROBLÈME. *Trouver les limites des racines de l'équation* $x^4 - 14xx + 24x - 12 = 0$. Si au lieu de 0 l'on écrit z & que l'on différencie, l'on aura $\frac{dz}{dx} = 0$

$= 4x^3 - 28x + 24 = 0$, ou $x^3 - 7x + 6 = 0$, dont les racines sont 2, 1, — 3; si on les substitue dans l'équation aussi bien que ∞ & $-\infty$ au lieu de x, l'on a

pour $x = \infty$ . . . . . . $z = \infty$
$x = 2$ . . . . . . $z = -4$
$x = 1$ . . . . . . $z = -1$
$x = -3$ . . . . . $z = -129$
$x = -\infty$ . . . . . $z = +\infty$.

Si l'on conçoit qu'ayant pris l'abscisse $AP = \infty$ (fig. 136) on mene l'ordonnée $mP = \infty$, qu'à l'abscisse $Af = 2$ réponde l'ordonnée $fg = -4$, à l'abscisse $An = 1$ l'ordonnée $nM = -1$, à l'abscisse $Ab = -3$ l'ordonnée $bD = -129$, & à l'abscisse $Ap = -\infty$ l'ordonnée $ps = \infty$, il est visible que l'ordonnée $mP = z$ (*) ne peut devenir de positive négative, à moins qu'elle ne devienne $= 0$ au point B où la courbe coupe l'axe de x; mais parce que l'ordonnée reste toujours négative entre $x = 2$ & $x = 1$, elle ne devient point $= 0$; donc aucun x compris entre 2 & 1 ne rencontre la courbe, & il n'y a aucune valeur de x entre 2 & 1 qui puisse rendre l'équation $= 0$, ou, ce qui revient au même, qui soit une racine de l'équation.

De même il n'y a aucune racine possible comprise entre 1 & — 3; mais parce qu'en supposant $x = -\infty$, l'ordonnée correspondante $z = +\infty$ est positive, la courbe doit couper l'axe des x en un autre point C, & les racines réelles de l'équation sont AB & AC, situées l'une entre $x = \infty$ & $x = 2$, l'autre entre $x = -3$ & $x = -\infty$, les autres racines de l'équation étant imaginaires.

152. PROBLÈME. *Trouver les limites de l'équation* $x^4 - 2x^2 + 3x + 4 = 0$. On aura, en écrivant z au lieu de 0 & opérant comme dans le problême précédent, on aura, dis-je, $4x^3 - 4x + 3 = 0$: cette équation du troisiéme degré n'a qu'une seule racine réelle approchée $= -1.3$.

(*) Il faut supposer qu'on a décrit la courbe de la figure 136, en prenant z pour l'ordonnée, faisant $x^4 - 14xx +$ &c. $= z$, & en donnant successivement plusieurs valeurs à x.

Substituant

Substituant cette valeur de x dans la proposée, aussi bien que ∞ & $-\infty$, l'on aura

pour $x = \infty$ . . . . . . $z = \infty$
$x = -1.3$ . . . . . $z = -0.32$
$x = -\infty$ . . . . . $z = +\infty$.

Donc il y a deux racines possibles, l'une entre $x = \infty$ & $x = -1.3$, l'autre entre $x = -1.3$ & $x = -\infty$. Ces racines sont -1 & -4, qui rendent l'équation proposée $= 0$; les autres sont imaginaires.

REMARQUE. La courbe de l'équation $x^n - Ax^{n-1} + \&c. = z$ peut avoir des points multiples auxquels les x peuvent rencontrer la courbe; dans ce cas l'abscisse correspondante est censée multiple. Par exemple si un point triple tombe sur l'abscisse $x = 2$, alors il y a trois racines dont chacune est $= 2$. La racine qui répond au point auquel l'abscisse touche la courbe peut être double, quadruple, sextuple, & ainsi de suite, selon la serie des nombres pairs 2, 4, 6, 8, &c. Celle qui est déterminée par un point dans lequel l'abscisse touche & coupe la courbe, est au moins triple; mais elle peut être quintuple, septuple, &c. selon la suite des nombres impairs 3, 5, 7, &c. Or quand il y a des racines égales dans une équation, on peut les trouver par les méthodes que nous avons données dans notre Algébre ou par celle que nous donnerons dans la suite.

Si la courbe s'approche de la ligne des x de maniere que les points de la courbe paroissent se confondre pendant un certain intervalle avec l'axe des abscisses, il faut faire beaucoup d'attention pour ne pas confondre les ordonnées négatives avec les positives.

Si l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$ donnoit pour $x = \infty$ . . $z = \infty$
$x = a$ . . $z = -A$
$x = b$ . . $z = +B$
$x = c$ . . $z = -C$
$x = -\infty$. $z = +\infty$,

l'équation $z = 0$ auroit autant de racines réelles & une de plus qu'il y auroit de lettres, a, b, c, &c, parce qu'entre ∞ & $-A$ il y a une racine réelle, & une autre entre $x = -\infty$ & $x = c$. En général

si nous supposons que les racines réelles de l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$ sont representées par $x = a, b, c, d, e, f, g$, &c. on suppose que les quantités a, b, c, &c. aillent en décroissant, & qu'alors on ait

$$z = A, B, C, E, F, G, \&c.$$
$$- + - + - + \&c.$$ c'est-à-dire

si en supposant $x = a$, z devient $= -A$, si en faisant $x = b$, z devient $+C$, &c. l'équation $z = 0$ aura autant de racines réelles qu'il y a de lettres a, b, c, &c. & une de plus. Si une des lettres majuscules n'a pas le signe écrit au-dessous d'elle, elle indiquera deux racines imaginaires; ainsi si A avoit le signe $+$, entre ∞ & b il y auroit deux racines imaginaires. Si C avoit le signe $+$ il n'y auroit aucune racine réelle entre b & c.

Outre les racines imaginaires ainsi indiquées, l'équation $z = 0$ aura encore autant de racines imaginaires que l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$.

Si A avoit le signe $+$ & B le signe $-$, il n'y auroit que deux racines imaginaires indiquées par ces signes. En général les signes contigus pris deux à deux sans qu'aucun signe soit répété deux fois, indiquent deux racines imaginaires s'ils sont différens de ce qu'ils doivent être pour indiquer des racines réelles. Ainsi si les quatre premiers signes étoient $+ - + -$, ils indiqueroient 4 & non 8 racines imaginaires; car si l'équation z a un nombre n de racines, l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$ aura $n - 1$ racines; donc il peut y avoir $n - 1$ lettres a, b, c, &c; donc si chacun des signes $+ - + 1$ désignoit deux racines imaginaires, l'équation z pourroit avoir $2n - 2$ racines imaginaires; ce qui est faux: car si $n = 7$, $2n - 2$ sera $= 12$; or une équation du septiéme degré ne peut avoir 12 racines imaginaires. Si $x = b$, par exemple, rendoit $z = B = 0$, alors l'équation $z = 0$ auroit des racines égales; car si l'équation z avoit un facteur $(x - b)^n = 0$, en différenciant, l'on auroit $n . (x - b)^{n-1} dx$; donc le facteur $(x - b)^{n-1}$ se trouveroit dans l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$, qui auroit autant de racines égales qu'il y a d'unités dans $n - 1$.

Si $n = 2$, cette équation auroit une racine indiquée par la valeur de $x = b$, qui rend $z = B = 0$. Si $n = 3$; alors l'équation $\frac{dz}{dx}$ auroit deux racines égales, & l'équation $z = 0$ en auroit 3. En général si l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$ a un facteur $(x - L)^n = 0$, qui indique un nombre n de racines $= L$, l'équation $z = 0$ aura un nombre $n + 1$ de racines $= L$, pourvu que $x = L$ rende $z = 0$.

153. THÉORÊME. *Si les quantités a, b, c, e sont supposées les racines toutes inégales d'une équation composée de facteurs selon la forme $(x - a)^m . (x - b)^n . (x - c)^r . (x - e)^t = 0 = z$, on suppose que m, n, r, t sont des nombres entiers positifs, je dis qu'en divisant cette équation par $(x - a)^{m-1} . (x - b)^{n-1} . (x - c)^{r-1} . (x - e)^{t-1}$, le diviseur & le quotient $(x - a) . (x - b) . (x - c) . (x - e)$ seront rationels, quand même a, b, c, e seroient irrationels ou imaginaires, on suppose que l'équation donnée ne contient aucun radical.* Il est visible que l'équation donnée est le produit du diviseur & du quotient dont on vient de parler ; donc si l'un des deux est rationel, l'autre le sera aussi, autrement leur produit ne sauroit être rationel. Si l'on suppose le premier membre de l'équation donnée $= z$, l'on aura

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} = & \, m . (x - a)^{m-1} . (x - b)^n . (x - c)^r . (x - e)^t \\ & + n . (x - a)^m . (x - b)^{n-1} . (x - c)^r . (x - e)^t \\ & + r . (x - a)^m . (x - b)^n (x - c)^{r-1} . (x - e)^t \quad [*] \\ & + t . (x - a)^m . (x - b)^n . (x - c)^r . (x - e)^{t-1}.\end{aligned}$$

[*] Cette équation est évidente, en différenciant & faisant varier seulement le facteur $(x - a)^m$, ensuite le facteur $(x - b)^n$, & ainsi de suite.

Si l'on suppose $\frac{dz}{dx}=0$, il est visible que cette équation & la proposée auront $(x-a)^{m-1} \times (x-b)^{n-1} . (x-c)^{r-1} . (x-e)^{t-1}$ pour diviseur commun, j'appellerai (R) ce diviseur. En effet l'équation $\frac{dz}{dx}=0$ est composée de ce diviseur & de

$$\begin{aligned} & m.(x-b).(x-c).(x-e) \\ + & n.(x-a).(x-c).(x-e) \\ + & r.(x-a).(x-b).(x-e) \\ + & t.(x-a).(x-b).(x-c). \end{aligned}$$

Il n'est pas moins évident que le même diviseur R commun aux deux équations est le diviseur le plus composé (*). Or en faisant attention à la méthode que nous avons donnée dans notre Algébre pour trouver le plus grand diviseur commun, il est évident que si deux quantités rationelles ont un diviseur commun, ce diviseur doit être rationel; donc puisque l'équation $z=0$ & l'équation $\frac{dz}{dx}=0$ sont toutes les deux rationelles; car la différentielle d'une quantité rationelle ne peut être irrationelle, le diviseur proposé sera rationel.

COROLLAIRE. Si l'on désigne par A le produit de tous les facteurs simples qui divisent l'équation un nombre m de fois, par B le produit de tous

(*) On l'appelle ordinairement le plus grand diviseur commun. Ainsi x^2 sera le diviseur commun le plus composé des quantités ax^2, bx^3. Mais si $x=\frac{1}{2}$, x^2 sera $=\frac{1}{4}$, & x sera le plus grand diviseur commun, & x^2 le diviseur le plus composé. Plusieurs confondent ensemble le diviseur commun le plus composé avec le plus grand commun diviseur.

les facteurs simples qui la divisent un nombre n de fois, par C le produit des facteurs simples qui la divisent un nombre r de fois & par D le produit des facteurs simples qui la divisent un nombre t de fois, l'on aura $A^m. B^n. C^r. D^t = 0$; donc cette équation sera divisible par $A^{m-1}. B^{n-1}. C^{r-1}. D^{t-1}$, & ce diviseur sera rationel, aussi bien que le quotient. Si $t = 1$, l'on aura $D^{t-1} = D^0 = 1$, & le diviseur sera $A^{m-1}. B^{n-1}. C^{r-1}$.

REMARQUE. On peut toujours disposer les choses de maniere que les exposans m, n, r, t aillent en décroissant, de sorte que l'on ait $m > n$, $n > r$, $r > t$.

154. THÉORÊME. *Si A, B, C, D ayant les mêmes significations que dans le corollaire précédent, l'on a l'équation* $A^m. B^n. C^r. D^t = 0$, *chaque facteur A, B, C, D sera rationel. On suppose ici que les exposans m, n, r, t vont en diminuant, de maniere que t est le plus petit.* Comme $A^m. B^n. C^r. D^t$ est divisible par le diviseur rationel $A^{m-1}. B^{n-1} \times C^{r-1}. D^{t-1}$, de même ce diviseur est divisible par le diviseur rationel $A^{m-2}. B^{n-2}. C^{r-2}. D^{t-2}$ & celui-ci par $A^{m-3}. B^{m-3}. C^{r-3}. D^{t-3}$, & ainsi de suite jusqu'à ce que l'exposant de D soit $= 1$, & alors l'on aura une quantité de cette forme $A^f. B^g. C^h. D$ qui sera divisible par $A^{f-1}. B^{g-1}. C^{h-1}$, & celle ci par $A^{f-2}. B^{g-2}. C^{h-2}$, & (en diminuant toujours les exposans) par une quantité de cette forme $A^i. B^L. C$, qui est divisible par $A^{i-1} B^{L-1}$, & celle-ci par $A^{i-2}. B^{L-2}$, & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve pour diviseur une quantité de cette forme $A^s B$, qui est divisible par A^{s-1}, & celle-ci par A^{s-2}, & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive au diviseur A. Donc puis-

qu'en divisant ou en multipliant des quantités rationelles par des quantités rationelles, les résultats sont toujours rationels, A sera rationel, aussi bien que $A^{s}B$; donc B sera rationel, aussi bien que $A^{i}.B^{l}.C$; donc C sera rationel, aussi bien que $A^{f}.B^{g}.C^{h}.D$; donc D sera rationel; donc &c.

155. REMARQUE. A, B, C, D désignant les mêmes choses que dans le théorême, si l'on a l'équation $A^5.B^4.C^2.D = z = 0$.

P	Q	R	S
I	$A^5B^4C^2D$	ABCD	D
II	A^4B^3C	ABC	C
III	A^3B^2	AB	I
IV	A^2B	AB	B
V	A	A	A
VI	z	z	

Les équations $\frac{dz}{dx} = 0$ & $z = 0$ auront pour diviseur commun le plus composé A^4B^3C, comme il suit de ce qu'on a dit ci-dessus (153), & supposant $A^4B^3C = 0 = z$ & différenciant, l'on trouvera une autre équation $\frac{dz}{dx} = 0$, qui aura avec la précédente pour diviseur commun le plus composé, l'équation A^3B^2, & en continuant de différencier & de prendre le diviseur commun le plus composé, on trouvera les diviseurs que représenté la colonne Q. Si l'on divise l'équation proposée par le diviseur qui est au-dessous, & celui-ci par celui qui le suit, & ainsi de suite, & qu'on écrive les quotiens vis-à-vis les quantités divisées, l'on aura la colonne R. Si l'on divise cha-

cun des quotiens de cette colonne par celui qui le suit, l'on aura la colonne S : on a ajouté 1 aux colonnes Q & R. Cela posé, il est évident que les équations qui sont sous S (*) contiennent les équations qui sont contenues une fois seulement, ou deux fois seulement, ou trois fois seulement, &c. dans la proposée. Les équations contenues une fois seulement sont désignées par D, qui répond au n°. I de la colonne P; C, qui répond au n°. II de la colonne P, indique les équations qui sont contenues deux fois seulement dans la proposée; B indique les équations contenues quatre fois seulement dans la proposée; & A, qui répond au n°. V de la colonne P, indique les équations contenues cinq fois dans la proposée.

156. PROBLÊME. *Etant donnée une équation rationelle qui contienne quelques racines une fois seulement, d'autres deux fois seulement, d'autres trois fois seulement, &c. trouver d'autres équations rationelles dont la premiere contienne seulement les racines qui se trouvent une fois dans l'équation donnée, la seconde celles qui y sont contenues deux fois seulement, la troisiéme celles qui y sont contenues trois fois seulement, & ainsi de suite, & cela que les racines soient rationelles, irrationelles ou imaginaires* (**). Soit l'équation $A^m B^n C^r D^t = 0$, A, B, C, D ayant la même signification que ci-dessus, qu'on fasse $A^m B^n C^r D^t = z$; selon ce qu'on a dit

(*) D est regardé comme une équation; car c'est un facteur de l'équation proposée; donc on a $D = 0$; il en est de même des autres lettres de la colonne S.

(**) S'il y a des racines imaginaires, elles doivent être en nombre pair; nous supposons que l'équation proposée est rationelle.

ci-dessus (153), en faisant $\frac{dz}{dx} = 0 = p$, les équations z & p auront pour diviseur le plus composé $A^{m-1}\ B^{n-1}\ C^{r-1}\ D^{t-1}$, qu'on trouvera par la méthode que nous avons enseignée dans l'Algébre. Si l'on fait maintenant $A^{m-1}\ B^{n-1}\ C^{r-1}\ D^{t-1} = z$, l'on aura, en différenciant $\frac{dz}{dx} = p$, ou $dz = pdx$ (car A, B, C, D sont des fonctions de x) & le diviseur le plus composé des quantités que nous venons d'appeller z, & p sera $A^{m-2}\ B^{n-2}\ C^{r-2}\ D^{t-2}$, & en continuant de même, parce qu'on suppose que les exposans m, n, r, t vont en diminuant, on parviendra à $D^{t-t} = D^{0} = 1$, à C^{0}, à B^{0}, de maniere qu'à la fin on aura $A^{1} = A$, ainsi que ci-dessus (155). Pour faire l'application de ce quon vient de dire, nous résoudrons le problême suivant.

EXEMPLE. *Etant donnée l'équation $x^{8} - 2x^{7} - 16x^{6} - 6x^{5} + 47x^{4} + 48x^{3} - 28x^{2} - 56x - 20 = 0$, on demande des équations plus simples dont l'une contienne seulement celles qui sont contenues une seule fois dans la proposée, la seconde celles qui sont contenues deux fois seulement, & ainsi de suite, en supposant que la proposée contient effectivement des équations multiples.* Supposant l'équation donnée $= z$, l'on différenciera & l'on aura, en supposant le multiplicateur de $dx = p$, l'on aura, dis-je, $\frac{dz}{dx} = p = 8x^{7} - 14x^{6} - 96x^{5} - 30x^{4} + 188x^{3} + 144x^{2} - 56x - 56 = 0$. Si l'on cherche le diviseur commun le plus composé (*) des équations z & p, on trouvera $x^{4} + 2x^{3} - x^{2} - 4x - 2 = 0$. Supposant maintenant ce di-

(*) On le trouve en s'y prenant comme pour le plus grand diviseur commun.

viſeur $= z$, prenant les différentielles & faiſant $\frac{dz}{dx} = p$, l'on a $p = 4x^3 + 6x^2 - 2x - 4 = 0$. Ces dernieres équations z & p ont pour diviſeur commun le plus composé $x + 1$; faiſant $x + 1 = z$, l'on aura $dz = dx = 1.dx$, & $\frac{dz}{dx} = 1 = p$, qui n'a aucun diviſeur commun avec $x + 1$, excepté l'unité. Si l'on écrit ces équations par ordre au milieu de la colonne Q (155), l'on aura cette ſuite d'équations

I $x^8 - 2x^7 - 16x^6 - 6x^5 + 47x^4 + 48x^3 - 28x^2 - 56x - 20 = 0$
II $x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$ . . . . $= 0$
III $x + 1$ . . . . $= 0$
IV. 1 . . . .

Si on diviſe chaque équation par celle qui la ſuit & la troiſiéme par 1, l'on aura, en ajoutant 1 pour répondre au n°. IV, l'on aura, dis-je, des équations qui répondent à la colonne R (155)

I $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 8x + 10$ . . . . $= 0$.
II $x^3 + x^2 - 2x - 2$ . . . . $= 0$
III $x + 1$ . . . . $= 0$
IV. 1 . . . .

Continuant à diviſer ces quantités par celles qui les ſuivent, l'on aura des quantités qui répondent à la colonne S (155)

P
I $x - 5 = 0$
II $x^2 - 2 = 0$
III $x + 1 = 0$

La premiere de ces équations donne $x = 5$, & renferme une racine qui eſt contenue une ſeule fois dans la propoſée, comme il eſt indiqué par le n°. correſpondant de la colonne P. L'équation $x^2 - 2 = 0$ donne $x^2 = 2$, $x = \pm\sqrt{2}$, c'eſt-à-dire, contient deux racines $+\sqrt{2}$ & $-\sqrt{2}$, dont chacune eſt contenue deux fois dans la propoſée, comme l'indique le n°. correſpondant de

la colonne P. La troisiéme $x + 1 = 0$ renferme une racine $= - 1$, qui est contenue trois fois dans la proposée, ainsi que l'indique le n°. correspondant de la colonne P, & ce sont là toutes les racines de l'équation proposée.

REMARQUE. Nous avons vu ci-dessus (84), que y étant supposé une fonction de x, lorsque x devient $x + m\,dx = x + f$, la fonction y devient $= y + \frac{f\,dy}{dx} + \frac{f^2\,ddy}{1.2.dx^2} + \frac{f^3\,d^3y}{1.2.3.dx^3}$ + &c. & qu'à $x - f$ répond $y - \frac{f\,dy}{dx} + \frac{f^2\,d^2y}{1.2.dx^2} - \frac{f^3\,d^3y}{1.2.3.dx^3}$ + &c. Si on suppose que f soit $= x$; de maniere que x devienne $x - x$, alors la derniere formule devient $= y - \frac{x\,dy}{dx} + \frac{xx\,ddy}{2.dx^2}$ &c. Par la même raison en faisant dy constant, x fonction de y deviendra $x - \frac{y\,dx}{dy} + \frac{y^2\,ddx}{2.dy^2}$ &c. lorsque y deviendra $y - y$.

157. PROBLÊME. *Trouver les racines approchées d'une équation.* Soit l'équation $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots + g = 0$, si l'on substitue dans cette équation au lieu de x une quantité plus grande ou plus petite qu'une des racines, le résultat ne sera pas $= 0$; de sorte qu'on aura $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots + g = y$. Si on substitue au lieu de x une des racines approchées que j'appelle p, nous aurons, en considérant la quantité x comme une fonction de y, ce qui est très-permis, puisque y est une fonction de x, nous aurons, dis-je, dans ce cas, $p = x - \frac{y\,dx}{dy} + \frac{y^2\,d^2x}{2\,dy^2} - \frac{y^3\,d^3x}{2.3\,dy^3}$ + &c. Car alors y devient à peu près

$= y - y = 0$; & si p étoit une racine exacte de l'équation, y seroit $=0$, & alors la fonction x de y deviendroit exactement $x - \frac{y\,dx}{dy} + \frac{yy\,ddx}{2.dy^2} - \frac{y^3\,d^3x}{2.3.dy^3} + \frac{y^4\,d^4x}{2.3.4\,dy^4}$ — &c. on suppose ici dy constant.

Soit $\frac{dx}{dy} = q$, $\frac{dq}{dy} = r$, $\frac{dr}{dy} = t$, &c. on aura $p = x - yq + \frac{y^2 r}{2} - \frac{t y^3}{2.3} +$ &c.

Pour faire mieux comprendre l'usage de cette méthode. Soit l'équation $x^3 - 10x^2 - 130x + 850 = y$, dont une des racines approchées est $= 5$. Mais en substituant cette valeur de x, l'on trouve $y = 75$, & en différenciant l'on a $dy = 3x^2\,dx - 20x\,dx - 130\,dx$, & par conséquent $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2 - 20x - 130} = q$, $\frac{ddx}{dy} = \frac{20\,dx - 6x\,dx}{(3x^2 - 20x - 130)^2}$, & $\frac{dq}{dy} = \frac{ddx}{dy^2} = \frac{20 - 6x}{(3x^2 - 20x - 130)^3} = r$; & par conséquent $dr = \frac{3.(20 - 6x)^2\,dx}{(3x^2 - 20x - 130)^4} - \frac{6\,dx}{(3x^2 - 2x - 134)^3}$, & $\frac{dr}{dy} = \frac{d^3x}{dy^3} = \frac{3.(20 - 6x)^2}{(3x^2 - 20x - 130)^5} - \frac{6\,dx}{(3xx - 2x - 130)^4} = t$. Substituant 5 au lieu de x dans les valeurs de q, r, t, &c, on aura $q = -\frac{1}{155}$, $r = \frac{10}{3723875}$, $t =$ &c. & $p = x - yq + \frac{y^2 r}{2} = 5.4915$, à peu de chose près.

De quelques usages du Calcul différentiel dans les series.

158. PROBLÊME. *élever une serie à une puissance m.* Soit la serie $M = (a + bx + cx^2 + d'x^3 + ex^4 + \&c.)$ (*) qu'on veut élever à la puissance m, je fais M^m égale à la serie $N = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.)$, & j'ai $M^m = N$. Cette équation a lieu, quelle que soit la valeur de x; donc en supposant $x = 0$, l'on aura $a^m = A$. En différenciant, il vient $m.M^{m-1} \times dM = m\,dx.(b + 2cx + 3d'x^2 + 4ex^3 + \&c.)M^{m-1} = dx.(B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \&c.)$. Divisant le premier membre de la derniere équation par $M^m dx$, & le second par $N\,dx = M^m dx$, vous trouverez $\frac{m.(b + 2cx + 3d'x^2 + 4ex^3 + \&c.)}{a + bx + cx^2 + d'x^3 + ex^4 + \&c.}$

$$= \frac{B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \&c.}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.}.$$

Si l'on multiplie le premier membre de cette équation par le diviseur du second & réciproquement, il vient

$$m.\left\{\begin{array}{r} bA + bBx + bCx^2 + bDx^3 + bEx^4\ \&c. \\ + 2cAx + 2cBx^2 + 2cCx^3 + 2cDx^4\ \&c. \\ + 3d'Ax^2 + 3d'Bx^3 + 3d'Cx^4\ \&c. \\ + 4eAx^3 + 4eBx^4\ \&c. \\ + 5fAx^4\ \&c. \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} aB + bBx + cBx^2 + d'Bx^3 + eBx^4\ \&c. \\ + 2aCx + 2bCx^2 + 2cCx^3 + 2d'Cx^4\ \&c. \\ + 3aDx^2 + 3bDx^3 + 3cDx^4\ \&c. \\ + 4aEx^3 + 4bEx^4\ \&c. \\ + 5aFx^4\ \&c. \end{array}\right.$$

(*) On met d' pour ne pas confondre un coefficient avec la marque de la différentielle.

La loi de cette équation est si évidente, tant pour les colonnes horisontales, que pour les verticales, qu'il est inutile de l'expliquer.

Nous venons de voir que $A = a^m$. Pour déterminer les autres coefficiens, on fera attention que l'équation qu'on vient de trouver ne peut avoir lieu pour toutes les valeurs de x, à moins que le multiplicateur d'une puissance de x dans un des membres ne soit égal au multiplicateur de la même puissance prise dans l'autre membre. De plus en supposant $x = 0$, l'on a $bA.m = aB$; donc $B = \frac{m.bA}{a} = \frac{mba^m}{a}$ (à cause de $A = a^m$) $= mba^{m-1}$. En considérant tous les termes qui multiplient une même puissance de x dans chaque membre de l'équation comme un seul terme, & comparant chaque terme d'un membre avec le terme correspondant de l'autre membre, l'on aura autant d'équations qu'il y a de lettres B, C, D, &c. & ces équations serviroient à déterminer les coefficiens B, C, D, &c. L'équation $mbA = aB$ donne $B = \frac{mbA}{a}$, l'équation $mbB + 2mcA = bB + 2aC$ donne $C = \frac{(m-1).bB + 2mcA}{2a}$; on trouvera facilement les valeurs de D, E, &c.

159. Si l'on avoit la serie $xa + bx^2 + cx^3 +$ &c. on diviseroit tous les termes par x, & l'on auroit $a + bx + cx^2$ &c. qu'on pourroit élever à la puissance m, comme on vient de l'expliquer: mais on multiplieroit le résultat $A + Bx + Cx^2$ &c. par x^m. Si l'on avoit le polinome $a + cx^2 + ex^4 + x^5$, on éleveroit la serie $a + bx + cx^2$ &c. à la puissance m, & l'on feroit dans le résultat

$b = 0$, $d' = 0$, $f = 1$, $h = 0$ &c. si l'on vouloit élever la serie $a z^{\frac{1}{2}} + b z + c z^{\frac{3}{2}} + d' z^2$ &c. à la puissance m on feroit $z^{\frac{1}{2}} = x$, on substitueroit x au lieu de $z^{\frac{1}{2}}$, & divisant tous les termes par x, l'on auroit $a + bx + cx^2$ &c. qu'on éleveroit à la puissance m, en se souvenant de multiplier le résultat par $x^m = z^{\frac{m}{2}}$. en faisant successivement $m = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, &c. on aura la racine quarrée, la racine cubique, &c. de la serie M.

160. Tandis que nous sommes sur cette matiere, il ne sera pas inutile de faire remarquer la loi que suivent les termes du produit d'une serie $M = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$ &c.) par la serie $N = (a + bx + cx^2 + d'x^3 + ex^4$ &c.). En faisant la multiplication à l'ordinaire, il vient la serie P

$$\begin{array}{l} aA + aBx + aCx^2 + aDx^3 + aEx^4 \text{ \&c.} \\ \quad + bAx + bBx^2 + bCx^3 + bDx^4 \text{ \&c.} \\ \quad\quad + cAx^2 + cBx^3 + cDx^4 \text{ \&c.} \\ \quad\quad\quad + d'Ax^3 + d'Bx^4 \text{ \&c.} \\ \quad\quad\quad\quad + eAx^4 \text{ \&c.} \\ \quad\quad\quad\quad\quad \text{\&c.} \end{array}$$

On doit examiner avec attention la loi des coefficiens de chaque terme en considérant toutes les quantités où se trouve une même puissance de x comme un seul terme.

Le premier terme de la serie P est le produit des deux premiers termes des series M & N. Mais on trouve le coefficient du second terme, en multipliant le premier terme de la serie N par le coefficient du second terme de la serie M, & le coefficient du second terme de la serie N par le premier terme de la serie M, & ajoutant les produits. Le troisiéme terme de la serie P se trouve

en multipliant le premier coefficient de N par le troisiéme de M, le second par le second, & le troisiéme par le premier; & en général pour avoir le coefficient d'un terme quelconque de la serie P, par exemple le sixiéme, on prendra six termes dans chacune des series M & N, si c'étoit le septiéme, on en prendroit sept, & ainsi de suite; on multipliera le premier de la premiere par le dernier de l'autre, le second de M par le pénultiéme de N, le troisiéme de M par l'antépénultiéme de N, & ainsi de suite.

161. Comme l'on peut souvent avoir besoin de réduire une fraction en serie, nous allons parler de cette opération.

Soit la fraction $\frac{a}{b+mx}$, je fais $\frac{a}{b+mx} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c. Multipliant tout par $b+mx$, il vient $a = bA + bBx + bCx^2 + bDx^3$ &c.
$+ mAx + mBx^2 + mCx^3$ &c.
Faisant la comparaison des termes en égalant bA à a, l'on aura $A = \frac{a}{b}$, & égalant les autres termes à o, l'on aura $bB + mA = o$, $B = \frac{-mA}{b}$, $C = -\frac{mB}{b}$, $D = \frac{-mC}{b}$, &c.

En considérant ces coefficiens avec attention, on verra qu'ils forment une serie récurrente du premier ordre, dans laquelle chaque terme est déterminé par le précédent multiplié par $\frac{-m}{b}$, & l'on aura $\frac{a}{b+mx} = \frac{a}{b} - \frac{mAx}{b} - \frac{mBx^2}{b}$

&c. On doit faire usage de cette serie, si $x < \frac{b}{m}$.
Mais si $x > \frac{b}{m}$, on formera la serie de cette maniere $\frac{a}{mx+b} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} +$ &c. qui étant traitée par la même méthode, donnera $\frac{a}{mx+b} = \frac{a}{mx} - \frac{bA}{mx^2} - \frac{bB}{mx^3}$ &c. dans laquelle les lettres A, B, C &c. désignent le coefficient du terme antécédent. Par exemple B désigne dans cette serie le coefficient $-\frac{bA}{m}$; mais dans la premiere serie trouvée, B désigne $-\frac{mA}{b}$.

Si l'on avoit la fraction $\frac{a+mx}{b+cx+nx^2}$, l'on feroit $\frac{a+mx}{b+cx+nx^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ &c. d'où l'on tire

$$\begin{aligned} a+mx = {} & bA + bBx + bCx^2 + bDx^3 \text{ \&c.} \\ & + cAx + cBx^2 + cCx^3 \text{ \&c.} \\ & + nAx^2 + nBx^3 \text{ \&c.} \end{aligned}$$

En faisant le premier terme $= a$, l'on trouve $A = \frac{a}{b}$, en faisant le second $= mx$, l'on trouve $B = \frac{m - cA}{b}$. Faisant chacun des autres termes $= 0$, l'on a $C = \frac{-cB - nA}{b}$, $D = \frac{-cC - nB}{b}$ &c. Ces coefficiens forment une serie récurrente du second ordre dans laquelle chaque terme est donné par deux termes antécédens, en multipliant le

le plus proche de celui que l'on cherche par $\frac{-c}{b}$ & le plus éloigné par $-\frac{n}{b}$. Les premieres lettres A, B, C, &c. dans ces termes désignent le coefficient du terme antécédent, les secondes A, B, C, &c. désignent le coefficient de celui qui précede l'antécédent; ainsi dans la valeur de D, C désigne le coefficient du terme antécédent, & B celui du terme qui précede l'antécédent. Si l'on vouloit former une serie dans laquelle x se trouvât au diviseur, l'on feroit $\frac{mx+a}{nx^2+cx+b} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3}$ &c. qui étant traitée de même, donnera des coefficiens qui formeront une serie récurrente du second ordre. De même si le dénominateur de la fraction est du troisiéme degré, la serie sera récurrente du troisiéme ordre, & ainsi de suite.

Nous avons enseigné dans la premiere Partie de cet Ouvrage, à trouver le terme général & le terme sommatoire des series récurrentes; ainsi il seroit inutile d'en parler ici.

162. On doit remarquer que pour qu'une fraction produise une serie récurrente, il est nécessaire que l'exposant de x dans le dénominateur soit plus grand que celui de x dans le numérateur. Par exemple en supposant $\frac{a^3+x^3}{a-x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ &c. on trouvera l'équation $a^3+x^3 =$

$$\begin{array}{l} aA + aBx + aCx^2 + aDx^3 \text{ \&c.} \\ \quad - Ax - Bx^2 - Cx^3 \text{ \&c.} \end{array}$$

En faisant la comparaison, l'on trouve $a^3 = aA$;

ou $A = a^2$, $B = \frac{A}{a}$, $C = \frac{B}{a}$. Jusques-là la loi eſt conſervée ; mais le terme ſuivant donne $x^3 = aDx^3 - Cx^3$; où $1 = aD - C$, ou $D = \frac{1+C}{a}$. Après ce terme, la ſerie ne ſera plus interrompue.

Pour éviter cet inconvénient, on diviſera le numérateur par le dénominateur juſqu'à ce qu'on trouve une fraction dans laquelle l'expoſant de x dans le dénominateur ſoit plus grand que dans le numérateur. Dans l'exemple propoſé, en diviſant $x^3 + a^3$ par $-x + a$, l'on aura $x^2 - ax - aa + \frac{2a^3}{a-x}$; ainſi la fraction propoſée ſera égale à $x^2 - ax - aa$ plus la ſerie récurrente que donnera la fraction $\frac{2a^3}{a-x}$.

163. Si l'on avoit la fraction $\frac{a^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}}{a - a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + x^1}$, on pourroit réduire les expoſans $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ & 1 de x au même dénominateur, en cherchant la progreſſion arithmétique dans laquelle ils ſont renfermés, & l'on auroit, en faiſant attention que $a = ax^0$, l'on aurois, dis-je, $0 = \frac{0}{6}$, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ & $1 = \frac{6}{6}$; ces expoſans ſont renfermés dans la progreſſion arithmétique $0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6}$, &c. dont les termes doivent être les expoſans de x dans la ſerie cherchée, qui ſera $= A + Bx^{\frac{1}{6}} + Cx^{\frac{2}{6}} + Dx^{\frac{3}{6}}$ &c. & faiſant les opérations néceſſaires, l'on aura une ſerie récurrente du ſixiéme ordre produite

par la fraction $\frac{a^{\frac{2}{6}} + x^{\frac{2}{6}}}{a^{\frac{6}{6}} - a^{\frac{3}{6}}x^{\frac{3}{6}} + x^{\frac{6}{6}}}$, que l'on fera

$$= \frac{a^{\frac{2}{6}} + x^{\frac{2}{6}}}{a^{\frac{6}{6}} + 0.x^{\frac{1}{6}} + 0.x^{\frac{2}{6}} - a^{\frac{3}{6}}x^{\frac{3}{6}} + 0.x^{\frac{4}{6}} + 0.x^{\frac{5}{6}} + x^{\frac{6}{6}}}.$$

REMARQUE. La fraction $\frac{1}{1-x}$ (en divisant le premier terme par 1 & multipliant par $1 - x$, ôtant du numérateur le produit du diviseur par le quotient, divisant le reste par $1 - x$, & ainsi de suite) devient $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ &c. Si l'on fait $x = 2$, l'on aura $\frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1$, & $1 + x + x^2$ &c. $= 1 + 2 + 4 + 8 + 16$ &c. Comment accorder cela? Après la premiere division, l'on a $1 + \frac{x}{1-x}$. Après la seconde division, l'on trouve $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$; donc si l'on s'arrête au second terme, l'on aura $\frac{1}{1-x} = 1 + x$: mais on négligera $\frac{x^2}{1-x} = \frac{4}{-1} = -4$; or $1 + x = 3$ & $3 - 4 = -1$; donc on sera éloigné de la valeur véritable de la fraction cherchée de la quantité $\frac{x^2}{1-x}$, & en continuant à l'infini, la serie $1 + x + xx + x^3 \ldots . x^\infty$ sera éloignée de la véritable valeur cherchée de la quantité $\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$; de sorte que

$\frac{1}{1-x}$ est la somme de la serie $1 + x + x^2 \ldots\ldots x^m$ en ajoutant $\frac{x^{m+1}}{1-x}$, & non autrement. Ainsi quand il s'agit d'une serie divergente $1 + x + x^2 + x^3$ &c. produite par l'évolution d'une fraction, on peut dire que cette fraction est la somme de la serie; mais alors on doit entendre par somme une expression finie dont l'évolution a produit la serie. Mais si $x < 1$, si par exemple $x = \frac{1}{2}$, l'on aura $1 + x + x^2$ &c. $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ &c. $= \frac{1}{1-x} = 2$; c'est-à-dire, que dans ce cas la serie $1 + x + x^2$ &c. approche d'autant plus de la valeur cherchée que l'on prend plus de termes, & à l'infini la serie est $= 2$.

Nous ferons encore observer qu'il y a une infinité de series qui sont d'abord divergentes, & qui deviennent ensuite convergentes; de sorte qu'en prenant un certain nombre de termes, on peut avoir la valeur de la serie aussi approchée qu'on veut. Cela aura lieu lorsque le facteur numérique du dénominateur augmente plus après un certain nombre de termes que le numérateur de chaque terme. Soit la serie $A = x + \frac{5x^2}{7} + \frac{7x^3}{7 \cdot 4} + \frac{7 \cdot 4 x^4}{7 \cdot 4 \cdot 5}$ &c. Si $x = 10$, les termes iront d'abord en augmentant, parce que le multiplicateur x du numérateur augmente plus le numérateur que le dénominateur n'est augmenté par les facteurs 4, 5, &c. Mais au 11e terme, le facteur x étant $= 10$ & le facteur qui augmente le dénominateur étant $= 11$, ce terme sera plus petit que le 10e & le 12e encore plus petit que le 11e, & ainsi de suite; donc on pourra,

en prenant un certain nombre de termes, avoir la valeur approchée de la serie A lorsque $x = 10$; & il est visible que ce sera la même chose pour une autre valeur finie de x.

164. PROBLÈME. *Etant donnée la somme y de la serie $A + Px + Qx^2 + Rx^3 +$ &c. dont on multiplie les termes par les constantes $a, b, c,$ &c. on demande la somme M de la serie résultante $aA + bPx + cQx^2$ &c.* Quoiqu'on ne connoisse aucune méthode pour résoudre ce problême dans toute sa généralité, nous pouvons cependant en trouver la solution dans certains cas. Si, par exemple, les coefficiens $a, b, c, e, f,$ &c. forment la serie des nombres figurés, on prendra les premieres, secondes, &c. différences jusqu'aux dernieres qui s'évanouissent. Les premieres différences seront $b - a$, $c - b$, $e - c$, $f - e$, &c. les secondes sont $c - 2b + a$, $e - 2c + b$, $f - 2e + c$, &c. les troisiémes sont $e - 3c + 3b - a$, $f - 3e + 3c - b$, &c. & ainsi de suite. Si on fait $b - a = B$, $c - 2b + a = C$, $e - 3c + 3b - a = D$, $f - 4e + 4c - 4b + a = E$, &c. je dis que la somme M sera $= ay + \frac{Bxdy}{dx} + \frac{Cx^2ddy}{dx^2} + \frac{Dx^3d^3y}{dx^3} + \frac{Ex^4d^4y}{dx^4} +$ &c, dx étant constant.

En effet on aura les équations suivantes:

$$y = A + Px + Qx^2 + Rx^3 + Tx^4 + \text{\&c.}$$
$$dy = Pdx + 2Qxdx + 3Rx^2dx + 4Tx^3dx + \text{\&c.}$$
$$ddy = 2Qdx^2 + 6Rxdx^2 + 12Tx^2dx^2 + \text{\&c.}$$
$$d^3y = 6Rdx^3 + 24Txdx^3 + \text{\&c.}$$
$$d^4y = 24Tdx^4 + \text{\&c.}$$

d'où l'on tire

$$ay = Aa + aPx + aQx^2 + aRx^3 + aTx^4 \text{ \&c.}$$
$$\frac{Bxdy}{dx} = BPx + 2BQx^2 + 3BRx^3 + 4BTx^4 \text{ \&c.}$$
$$\frac{Cx^2d^2y}{2dx^2} = CQx^2 + 3CRx^3 + 6CTx^4 \text{ \&c.}$$
$$\frac{Dx^3d^3y}{6dx^3} = DRx^3 + 4DTx^4 \text{ \&c.}$$
$$\frac{Ex^4d^4y}{24.dx^4} = ETx^4 \text{ \&c.}$$

Si $M = Aa + Pbx + Qcx^2 + Rex^3 + Tfx^4$ &c. comme on le suppose, on doit avoir, en comparant les termes $aP + BP = Pb$, ou $B = b - a$. Mais $a + 2B + C = c$, ou $C = c + a - 2b$. On trouvera de même $D = e - 3c + 3b - a$, &c. qui sont les valeurs qu'on a d'abord supposées aux lettres B, C, D, donc on a eu raison de supposer $M = ay + \frac{B.xdy}{dx} + \frac{Cx^2d^2y}{2dx^2} +$ &c. Si les quantités a, b, c, e, f sont en progression arithmétique, les secondes différences étant nulles, l'on aura $C = o$, $D = o$ &c. & $M = ay + \frac{Bxdy}{dx}$. Si les secondes différences sont constantes, l'on aura $D = o$, & $M = ay + \frac{Bxdy}{dx} + \frac{Cx^2ddy}{2dx^2}$.

Soit la serie $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 +$ &c. $= \frac{1}{1-x}$; de sorte que l'on a $A = P = R = 1$. Qu'on multiplie les termes de cette serie par les termes de la progression arithmétique ÷ 3. 5. 7. 9. 11. &c. on demande la somme de la serie $3 + 5x + 7x^2 + 9x^3 + 11x^4$ &c. Dans ce cas $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$, $b - a = B = 2$; mais $C = D = o$. La somme de la serie proposée sera, en supposant $x > 1$, $\frac{1}{1-x} = y$; donc $dy = \frac{dx}{(1-x)^2}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{[1-x]^2}$, & $M = ay + \frac{Bxdy}{dx} = \frac{3}{1-x} + \frac{2x}{[1-x]^2}$.

Recherches métaphysiques sur la nature du calcul différentiel.

165. Les anciens Géomêtres faisoient usage des raisons des quantités dont la différence devenoit plus petite qu'aucune quantité donnée. Pour donner une idée du chemin qu'ils pouvoient suivre dans la détermination des sous-tangentes des courbes, soit proposé

de mener une tangente MT (fig. 137) au point M d'une courbe donnée, que nous ſuppoſerons une parabole. Si l'on tire la tangente TMC & la ſecante MIS, il eſt viſible que l'angle CMS deviendra d'autant plus petit, que l'arc MI ſera plus petit, & qu'en ſuppoſant cet arc plus petit qu'aucune quantité donnée, l'angle ſera plus petit qu'aucune quantité donnée. En effet en concevant cet arc comme un arc circulaire, il eſt évident que l'angle CMI formé par la tangente & une corde a pour meſure la moitié de cet arc; donc cet angle eſt inaſſignable lorſque l'arc eſt inaſſignable ou plus petit qu'aucune quantité donnée; donc les lignes CI & LS deviendront plus petites qu'aucune quantité donnée. Cela poſé, en ſuppoſant MH parallèle à l'axe AP, il eſt évident que les triangles PTM, LMH ſont ſemblables, & que la raiſon MP : PT eſt égale à la raiſon LH : MH. Or cette derniere raiſon devient à la fin égale à celle de SH : MH & à celle de IN : MN; donc la raiſon de la différentielle IN de l'ordonnée à la différentielle MN de l'abſciſſe, devient à la fin égale à la raiſon de l'ordonnée à la ſous-tangente; & c'eſt là la limite qu'elle ne peut paſſer, & de laquelle elle approche d'autant plus que IN eſt plus petite. Donc en déterminant à quelle raiſon devient à la fin égale à la raiſon de la différence de l'ordonnée, à la différence de l'abſciſſe, on déterminera la ſous-tangente, & par conſéquent la tangente.

Soit $2ax = y^2$ l'équation de la parabole, $2a$ étant le paramêtre, ſi l'on augmente l'abſciſſe AP $= x$ de la quantité $Pp =$ MN $= dx$ & l'ordonnée MP $= y$ de la quantité IN $= dy$, en ſubſtituant $x + dx$ au lieu de x & $y + dy$ à la place de y,

l'on aura $2ax + 2adx = y^2 + 2y\,dy + dy^2$. Retranchant de cette équation celle de la courbe, il vient $2adx = 2y\,dy + dy^2$, d'où l'on tire $dy : dx :: 2a : 2y + dy$. Mais lorsque dy devient plus petit qu'aucune quantité donnée, la raison $2a : 2y + dy$ devient à la fin égale à la raison $2a : 2y$; donc à la fin l'on a $dy : dx :: 2a : 2y$. Mais à la fin la raison de $dy : dx$ est égale à la raison de l'ordonnée à la sous-tangente PT; donc $2a : 2y :: y : PT = \frac{2yy}{2a} = \frac{4ax}{2a} = 2x$, comme on l'a trouvé dans les sections coniques.

166. Nous avons trouvé ci-dessus la tangente de la parabole en faisant la différentielle de $y^2 = 2y\,dy$, & en négligeant dy^2, ce qu'on peut faire toutes les fois que y est fini; car alors dy^2 n'entre point dans la proportion de la limite (pourvu que la quantité affectée de dy ne soit pas $= 0$; car dans ce cas dy^2 serviroit à trouver la proportion de la limite). On peut voir par là qu'il n'y a point d'erreur à craindre en suivant notre méthode. Mais pour développer notre idée de maniere à ne laisser aucun doute, il faut faire voir 1°. qu'il y a des raisons qui approchent tellement de l'égalité, que la différence devient à la fin, c'est-à-dire, dans la limite, plus petite qu'aucune quantité donnée. Cela est évident pour les quantités dont l'une peut être augmentée & l'autre diminuée comme l'on voudra, comme il arrive aux abscisses AP, Ap; car en diminuant Ap, on peut faire tomber le point p sur P, & alors AP est $=$ Ap. Il y a des quantités qui approchent de l'égalité, en suivant une certaine loi, qui sont dans le même cas, par exemple la valeur de la serie $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, &c. approche

d'autant plus de l'unité, qu'on prend un plus grand nombre de termes. Ainsi en prenant les deux premiers termes, il s'en faudra de $\frac{1}{4}$; en prenant les trois premiers, il s'en faudra de $\frac{1}{8}$, & la somme entiere de la serie supposée continuée à l'infini, sera $= 1$, comme on l'a démontré dans la premiere Partie de cet Ouvrage, & comme cela est évident. Car si l'on partage une ligne d'un pied en deux parties égales, qu'on prenne d'abord une de ses moitiés, ensuite la moitié de l'autre moitié, ensuite la moitié du reste, & ainsi de suite, la somme de toutes ces parties donnera un pied.

Il faut démontrer en second lieu que les raisons ou les quantités qui vont toujours en s'approchant de l'égalité de maniere que leur différence devienne plus petite qu'aucune quantité donnée, deviennent à la fin égales. Supposons qu'à la fin leur différence soit D quantité donnée & déterminée; donc elles ne peuvent approcher de l'égalité plus près que de la quantité donnée D, ce qui est contre la supposition.

167. On peut remarquer qu'on ne doit pas regarder comme égales les quantités ou les raisons qui ont une différence, quelle qu'elle soit; mais seulement on doit conclure que deux quantités dont la différence devient plus petite qu'aucune quantité donnée, sont à la fin égales, parce qu'à la fin cette différence devient nulle ou $= 0$: ainsi cette égalité s'obtient dans la derniere limite, de laquelle les quantités ou les raisons s'approchent au-delà de toute mesure assignable, quoique peut-être dans certains cas elles ne parviennent jamais à cette derniere limite; donc dans les démonstrations fondées sur la méthode du calcul différentiel, on ne néglige aucune quantité grande ou petite,

mais on dit seulement que deux quantités ou deux raisons sont égales, lorsque leur différence est nulle.

168. Je sais que souvent les quantités s'évanouissent dans la limite; cependant il n'est pas inutile de considérer la proportion de la limite, parce que d'autres quantités qui ne s'évanouissent pas, & qui auparavant avoient la même proportion, acquierent dans la limite la proportion de la limite; car (fig. 137) les raisons IN : MN, CN : MN different, à la vérité, l'une de l'autre, de maniere cependant que la différence devient inassignable; donc dans la limite elles seront égales. Mais où est la limite? Au point M où les points N, I, C se confondent. Mais alors les lignes MN, CN, IN disparoissent, cela est vrai; cependant les lignes MH, LH, SH proportionnelles aux premieres, continuent de rester finies, & dans la limite les raisons LH: MH, SH: MH sont égales. Donc quoiqu'alors dy soit $= 0$ & $dx = 0$, cependant l'on a SH: MH :: MP: PT. Mais la raison de $dy : dx$ n'est pas égale à celle MP : PT tandis que dy & dx sont quelque chose; seulement la raison de $dy : dx$ approche extrêmement de celle de y : PT lorsque dy & dx sont des quantités extrêmement petites; donc très-près de la limite les raisons de $dy : dx$, $2a : 2y$, y : PT approchent extrêmement de l'égalité, & dans la limite, lorsque $dy = 0$ & $dx = 0$. les raisons de $2a : 2y$, y : PT sont parfaitement égales.

On peut donc dire que la raison de $dy : dx$ très-près de la limite fait connoître le raison exacte de y : PT dans la limite. Or la raison de $dy : dx$ très-près de la limite étant égale à la raison $2a : 2y + dy$, l'on a dans la limite $2a : 2y :: y$: PT, parce qu'alors

$dy = 0$, aussi bien que dy^2. Puisque dans la limite $dy^2 = 0$, il est visible qu'en cherchant la proportion de la limite, l'on peut en différenciant négliger dy^2. Mais pourquoi ne néglige-t'on pas aussi dy? Parce qu'alors on ne connoîtroit pas la raison très-approchée auprès de la limite de $2a : 2y$, que fait connoître la raison $dy : dx$. Ainsi les dy, les dx sont quelque chose, lorsqu'on les exprime, & deviennent $= 0$ à la fin du calcul; donc on peut négliger dx^2 devant dx, dx^3 devant dx^2, parce que si dx^2 se trouve dans un calcul, son coefficient étant fini, dx^2 suffira pour faire connoître la raison de la limite, & dx^3 devra être négligé.

169. M. Newton considere les différentielles comme des quantités évanouissantes ou naissantes, & c'est dans cet état qu'il considere les rapports de ces quantités: il les appelle *fluxions*. Pour désigner la fluxion de x, les Anglois écrivent $\dot{x}$; la seconde fluxion se marque ainsi $\ddot{x}$; la troisiéme fluxion se désigne par $\dddot{x}$; &c. On met autant de points au-dessus de la variable, qu'il est désigné par l'ordre de la fluxion. Ils appellent *fluentes* ce que nous appellons intégrales: ainsi x est la fluente de $\dot{x}$ ou de dx. Pour revenir à M. Newton, on peut lui faire cette objection. Si les fluxions sont des quantités évanouissantes, elles ne doivent point avoir d'autres fluxions, autrement une quantité évanouissante seroit composée d'autres quantités évanouissantes, ce qui paroît impossible: car il est évident qu'alors les premieres fluxions ne seroient pas évanouissantes. Mais dans nos principes rien n'empêche que des quantités dx, dy extrêmement petites très-près de la limite aient d'autres différentielles ddx,

$dddx$ &c. ddy, $dddy$ &c. D'ailleurs une chose quelconque est existante ou non existante : il n'y a point de milieu entre exister & ne pas exister, & toute quantité passe de l'existence à la non existence dans un instant indivisible. Il paroît donc bien difficile d'admettre des quantités évanouissantes ou des quantités considérées dans l'état de passage de l'existence à la non existence, comme il est impossible de considérer une chose dans son état de passage du néant à l'être.

170. On peut encore faire une autre objection à M. Newton. Les fluxions ou quantités évanouissantes sont quelque chose dans cet état, c'est-à-dire, pendant qu'elles s'évanouissent, ou sont $=0$. Dans le premier cas $IN = dy$ est $< NC$ (fig. 137), & la raison de dy à dx n'est pas égale à la raison de $CN : dx$, ou à la raison de $y : PT$. Dans le second cas il paroît absurde de chercher la raison d'un rien à un rien. Aussi M. Newton ne veut pas qu'on considere les fluxions lorsqu'elles sont évanouies, mais seulement lorsqu'elles s'évanouissent. Au reste je suis rempli d'estime pour ce sublime Mathématicien, auquel nous devons tant de belles découvertes.

REMARQUE. Nous avons dit ci-dessus (165) que la raison de $dy : dx$ étoit à la fin égale à la raison de l'ordonnée à la sous-tangente, d'où il suivroit qu'on auroit à la fin $dy : dx :: y : PT :: LH : MH$. Dans la limite on a $y : PT :: LH = HS$ (dans la limite) : HM, mais alors $dy = 0$ & $dx = 0$; donc jamais la raison de $dy : dx$ ne peut être égale à la raison de $y : TP$, puisque dy & dx ne peuvent atteindre à la limite sans cesser d'exister. Cette difficulté est sans doute très-forte, mais ne paroît pas impossible à résoudre. En effet quand

on prétend que la raiſon de $dy:dx$ devient à la fin égale à celle de y: PT, cela doit s'entendre de maniere que la raiſon de HS: HM, qui eſt égale très-près de la limite à celle de $dy:dx$, devient dans la limite égale à celle de HL: HM, qui eſt égale à celle de y: PT; de ſorte que ſi dy & dx exiſtoient dans la limite, la raiſon de $dy:dx$ ſeroit égale à celle de y: PT. De même quand on dit que des quantités ou des raiſons qui vont toujours en s'approchant de l'égalité de maniere que leur différence devient plus petite qu'aucune quantité donnée ſont à la fin égales, cela s'entend ſi ces quantités exiſtent dans la limite, à moins qu'on ne veuille établir une eſpéce d'égalité entre des riens; & pour les raiſons ſi les quantités qui les forment exiſtent, ou bien encore cela s'entend des quantités, qui dans la limite ne diſparoiſſent pas, & auxquelles les quantités qui dans la limite ſont $= 0$ étoient proportionnelles très-près de la limite.

Enfin ſi l'on ſe rappelle que l'on a trouvé ci-deſſus (165) $dy : dx :: 2a : 2y+dy$, ce qui a lieu auprès de la limite, on verra que dans la limite HL: HM:: $2a : 2y + 0$; car dans la limite $dy = 0$. Et ſi l'on fait LH $= dy$ & HM $= dx$, l'on aura dans la limite $dy : dx :: 2a : 2y :: y$: PT. Mais alors dy & dx ne ſont pas les différentielles de l'ordonnée & de l'abſciſſe, mais ſont des quantités HS, HM, qui hors de la limite, étoient proportionnelles aux véritables dy & dx, & qui dans la limite deviennent HL, HM (fig. 138), & ſont alors proportionelles à y & PT.

M. Euller prétend que les différentielles ſont des *purs riens*. Si cela étoit vrai, on ne pourroit les comparer enſemble; car on ne peut dire ni concevoir qu'un

rien soit double, triple, &c. d'un autre rien. Il faudroit même dans cette hypothèse admettre des riens de différens ordres les uns infiniment plus grands que les autres. Mais comment concevoir qu'un rien, qui n'est pas une grandeur, peut être plus grand ou plus petit qu'un autre rien, qui n'a lui-même aucune grandeur? Comment comparer ce qui ne peut ni exister, ni être conçu & qui n'a aucune propriété (*)? Ainsi nous ne saurions admettre l'opinion de ce grand Mathématicien.

Le détail dans lequel nous venons d'entrer peut faire comprendre aux Commençans en quoi *consiste* l'artifice du calcul différentiel, que très-peu de Géomètres paroissoient avoir pénétré. A l'égard du calcul intégral, puisqu'en différenciant y^2 l'on

(*) On dira peut-être que $6:3::6\times o:3\times o::o:o::2:1$. Mais si la raison $o:o$ vaut 2, la raison $6\times o:3\times o$ sera le produit des raison égales $6:3$ & $o:o$, & sa valeur sera 4 & non pas 2, ce qui est contre la supposition; & il est visible que les raisons $6:3$ & $6\times o:3\times o$ ne peuvent être supposées égales qu'autant qu'on regarde o comme une même quantité qui multiplie l'antécédent & le conséquent de la raison $6:3$. On ne peut donc supposer que la raison $o:o$ soit égale à celle de $2:1$ qu'autant qu'on suppose que l'antécédent o (qu'on regarde alors comme une quantité infiniment petite) est multiplié par une quantité double de celle qui multiplie le conséquent o, considéré comme une quantité infiniment petite égale au o qui se trouve à l'antécédent. On sait aussi qu'en divisant $aa-bb$ par $a-b$, le quotient donne $a+b$. Lorsque $b=a$, ce quotient est $=2a$, & alors on a $\frac{(a+b)(a-b)}{a-b}=\frac{2a(o)}{1.(o)}=\frac{2a}{1}=\frac{o}{o}$, en considérant o comme une même quantité qui multiplie $2a$ & 1.

écrit $2ydy$, il eſt viſible que pour retrouver y^2, il ſuffit d'augmenter l'expoſant (1 ſous-tendu) de y d'une unité, & de diviſer enſuite par $2dy$ pour avoir y^2, de maniere que les régles du calcul intégral étant analogues à celles du calcul différentiel, il ne peut y avoir aucune erreur dans la méthode qu'on ſuit dans ce premier calcul, quand même il y en auroit dans le ſecond.

Calcul des différences finies.

171. Si la quantité variable x reçoit un increment fini p, la fonction x^2 deviendra $(x+p)^2 = xx+2px+pp$; de même x^3 deviendra $x^3+3px^2+3p^2x+p^3$. Cependant la quantité $x^0 = 1$ ne changera pas de valeur, parce que $(x+p)^0$; eſt auſſi $= 1$; ce qui vient de ce que x^0 eſt une quantité conſtante $= 1$.

Suppoſons que y eſt une fonction de x, qui devient y^{I} (*) lorſque x devient $x+p$; & y^{II} lorſque x devient $x+2p$; &c. les valeurs de x & de y ſe répondront de la maniere qu'on voit ici.

x; $x+p$; $x+2p$; $x+3p$; $x+4p$; &c.
y; y^{I}; y^{II}; y^{III}; y^{IV}; &c.

Comme la ſerie arithmétique x; $x+p$; $x+2p$; $x+3p$; &c. peut être continuée à l'infini, de même la ſerie y; y^{I}; y^{II}; y^{III}; y^{IV}; &c. peut avoir une infinité de termes. Si $y=x$, ou ſi $y=ax+b$, la ſerie y; y^{I}; y^{II}; &c. ſera *arithmétique*. Si $y =$

(*) Dans l'expreſſion y^{I}, I ne déſigne pas l'expoſant de y, & l'on n'emploie cette expreſſion que pour diſtinguer y de y^{I}.

$\frac{a}{bx + c}$, l'on aura une *série harmonique.* Mais la serie sera *géométrique*, si $y = a^x$.

172. Pour désigner les différences qui se trouvent entre les termes de la serie y; y^{I}; y^{II}; &c. je me servirai de la lettre D; de sorte que $y^{\text{I}} - y$ sera $= Dy$, $y^{\text{II}} - y^{\text{I}} = Dy^{\text{I}}$, &c. Ainsi Dy exprimera l'increment que reçoit y lorsqu'on substitue $x + p$ au lieu de x : nous appellerons aussi cet increment *la différentielle finie* de y, ou simplement la différence de y. C'est pourquoi Dy^{II} sera la différence de y^{II}, c'est-à-dire, l'excès de y^{III} sur y^{II}. Dans la serie des différences Dy; Dy^{I}; Dy^{II}; Dy^{III}; Dy^{IV}; &c. on peut prendre de nouvelles différences, & les représenter comme on le voit ici.

$$DDy = Dy^{\text{I}} - Dy$$
$$DDy^{\text{I}} = Dy^{\text{II}} - Dy^{\text{I}}$$
$$DDy^{\text{II}} = Dy^{\text{III}} - Dy^{\text{II}}$$
&c.

Il est aisé de voir que DDy ou D^2y représente la seconde différence de y; D^2y^{I} la seconde différence de y^{I}; &c. De même les troisiémes différences de y; y^{I}; &c. seront désignées par D^3y; D^3y^{I}; &c. & ainsi de suite.

Maintenant puisque $Dy^{\text{I}} = y^{\text{II}} - y^{\text{I}}$, on aura $D^2y = y^{\text{II}} - 2y^{\text{I}} + y$, & $DDy^{\text{I}} = y^{\text{III}} - 2y^{\text{II}} + y^{\text{I}}$; & par conséquent $D^3y = DDy^{\text{I}} - DDy = y^{\text{III}} - 3y^{\text{II}} + 3y^{\text{I}} - y$. De même $D^4y = y^{\text{IV}} - 4y^{\text{III}} + 6y^{\text{II}} - 4y^{\text{I}} + y$; $D^5y = y^{\text{V}} - 5y^{\text{IV}} + 10y^{\text{III}} - 10y^{\text{II}} + 5y^{\text{I}} - y$; & ainsi de suite. Dans ces series les coefficiens numériques sont les mêmes que ceux du binome $(a - b)^m$ lorsque m est un nombre entier positif.

173. PROBLÊME. *Trouver les différences de tous les ordres de la puissance x^2.* Puisque $y = x^2$, on aura $y^I = (x + p)^2$, & $Dy = y^I - y = xx + 2px + pp - x^2 = 2px + pp$. Mais p est ici une quantité constante, qui ne reçoit aucun increment, & Dx est $= p$; donc $DDy = D(2px + pp) = 2pDx = 2pp$, & $DDDy = 0$; $D^4y = 0$; &c.

174. PROBLÊME. *Trouver les différences de tous les ordres de la puissance x^3.* En faisant $y = x^3$, l'on aura $y^I = (x + p)^3$, & $Dy = 3px^2 + 3ppx + p^3$. Mais $D.xx = 2px + pp$; donc $D.3px^2 = 6ppx + 3p^3$. Or $D.3ppx = 3p^3$, & $D.3p^3 = 0$; donc $DDy = 6p^2x + 6p^3$; & $D^3y = 6p^3$; les autres différences sont $= 0$.

175. PROBLÊME. *Trouver la différence premiere du logarithme hyperbolique de x.* Soit $y = L.x$, l'on aura $y^I = L.(x + p)$, & $Dy = y^I - y =$

$$L.(x + p) - L.x = L.\left(\frac{x + p}{x}\right) = L.\left(1 + \frac{p}{x}\right).$$

Puisque $Dy = y^I - y$, l'on aura $y^I = y + Dy$; l'on aura de même $y^{II} = y + 2Dy + DDy$; $y^{III} = y + 3Dy + 3DDy + D^3y$; $y^{IV} = y + 5Dy + 6DDy + 4D^3y + D^4y$; &c. Les coefficiens numériques se trouvent évidemment par l'évolution du binome $(a + b)^m$; de sorte qu'en général l'on aura la valeur de y de l'ordre n, que je désignerai par $y^{(n)}$, l'on aura, dis-je, $y^{(n)} =$

$$y + \frac{n}{1}Dy + \frac{n.(n-1).D^2y}{1.2} + \frac{n.(n-1).(n-2).D^3y}{1.2.3}$$

$+$ &c. Si au lieu d'un increment $+ p$, x recevoit un décrement $- p$, c'est-à-dire, si x se changeoit en $x - p$, alors à $(x - np)$ répondroit $y^{(n)} =$

$y - \frac{n}{1}.Dy + \frac{n.(n-1).D^2y}{1.2.} - \frac{n.(n-1).(n-2).D^3y}{1.2.3}$ &c.

176. Voyons maintenant par quel moyen étant donnée une différence, on peut par la méthode inverse revenir à la quantité qui l'a produite, & que nous appellerons *somme* (*). Si l'on suppose $z = Dy$, l'on aura $M.z = y + C$, M étant la caractéristique qui désigne la somme, & C une quantité constante arbitraire, ou qu'on peut déterminer par la nature du problême. Or cette quantité C n'ayant aucun increment, doit avoir disparu dans la différenciation. Quand on n'ajoutera pas de quantité constante à la somme, il faudra la supposer. Au reste cette quantité peut souvent être $= 0$.

Puisque $Dx = p$, l'on aura $M.p = x$, & $M.1 = \frac{x}{p}$; car la différentielle Dx étant $= p$, l'on aura $D(\frac{x}{p}) = \frac{p}{p} = 1$. Donc $M.1 = \frac{x}{p}$. Nous aurons aussi $M.(2px + pp) = x^2$; donc $M.x = \frac{xx}{2p} - M.\frac{p}{2} = \frac{x^2}{2p} - \frac{x}{2}$. L'on a de même $M.(3pxx + 3p^2x + p^3) = x^3$, ou $3p.Mx^2 + 3p^2.M.x + p^3.M.1 = x^3$; donc $M.xx = \frac{x^3}{3p} - pM.x - \frac{p^2}{3}M.1 = \frac{x^3}{3p} - \frac{x^2}{2} + \frac{px}{6}$. De même $M.x^3 = \frac{x^4}{4p} - \frac{3p}{2}M.x^2 - p^2Mx - \frac{p^3}{4}.M.1$.

(*) On pourroit l'appeller l'intégrale d'une différentielle aux différences finies.

Si l'on ſubſtitue dans cette expreſſion les valeurs trouvées ci-devant de M. x^2, M. x, & M. 1, il viendra M. $x^3 = \frac{x^4}{4p} - \frac{x^3}{2} + \frac{pxx}{4}$. On trouvera par la même méthode M. $x^4 = \frac{x^5}{5p} - \frac{1}{2}.x^4 + \frac{1}{3}px^3 - \frac{1}{30}p^3x$; M. $x^5 = \frac{x^6}{6p} - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}px^4 - \frac{1}{12}p^3.x^2$; M. $x^6 = \frac{x^7}{7p} - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}p.x^5 - \frac{1}{6}p^3.x^3 + \frac{1}{42}p^5x$. Il eſt facile de continuer. Si on ſuppoſe $p = 1$, ce qui eſt très-permis, on aura

$$\begin{aligned}
\text{M. } 1 &= \text{M. } x^0 = x \\
\text{M. } x &= \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x \\
\text{M. } xx &= \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x \\
\text{M. } x^3 &= \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x^2 \\
\text{M. } x^4 &= \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{30}.x \\
\text{M. } x^5 &= \tfrac{1}{6}x^6 - \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{5}{12}x^4 - \tfrac{1}{12}.x^2 \\
\text{M. } x^6 &= \tfrac{1}{7}x^7 - \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{42}.x \\
\&c. &= \&c.
\end{aligned}$$

177. Soit $y = \frac{1}{x+np}$, on aura $y^1 = \frac{1}{x+(n+1)p}$; $Dy = \frac{1}{x+(n+1)p} - \frac{1}{x+np} = \frac{-p}{(x+np).[x+(n+1)p]}$, formule digne de remarque. Donc M. $\frac{1}{(x+np)[x+(n+1)p]} = -\frac{1}{p}\left(\frac{1}{x+np}\right)$. Puiſque $Dy = \frac{1}{x+(n+1)p} -$

$\frac{1}{x+np}$, on a $y = M.(\frac{1}{x+(n+1)p}) - M.(\frac{1}{x+np}) = \frac{1}{x+np}$, & $M.(\frac{1}{x+np}) = M.(\frac{1}{x+(n+1)p}) - (\frac{1}{x+np})$, formule que je désignerai par (A).

178. PROBLÊME. *Trouver la somme de la quantité* $\frac{3p}{x(x+3p)}$. En faisant cette quantité $= t$, on aura $t = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3p}$. Donc $M.t = M.(\frac{1}{x}) - M.(\frac{1}{x+3p})$. Mais par la formule A, l'on trouve $M.(\frac{1}{x}) = M.(\frac{1}{x+p}) - \frac{1}{x}$; donc $M.t = M.(\frac{1}{x+p}) - M.(\frac{1}{x+3p}) - \frac{1}{x}$. De même $M.(\frac{1}{x+p})$ est $= M.(\frac{1}{x+2p}) - (\frac{1}{x+p})$; c'est pourquoi $M.t = M.(\frac{1}{x+2p}) - M.(\frac{1}{x+3p}) - \frac{1}{x} - (\frac{1}{x+p})$. Mais l'équation ci-dessus $M.(\frac{1}{x+(n+1)p}) - M.(\frac{1}{x+np}) = \frac{1}{x+np}$, donne, en supposant $n = 2$, $-(\frac{1}{x+2p}) = M.(\frac{1}{x+2p}) - M.(\frac{1}{x+3p})$; donc $M.t = -\frac{1}{x} - (\frac{1}{x+p}) - (\frac{1}{x+2p})$.

Usage du calcul des différences finies dans la doctrine des series.

179. x Désignant le nombre des termes, *le terme général* d'une suite est une fonction de x dans laquelle si on substitue successivement à la place de x les nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c. on obtiendra tous les termes de la serie. Ainsi la serie 1, 7, 13, 19, 25, 31, &c. a pour terme général $6x - 5$; de sorte que si l'on suppose $x = 5$, par exemple, ce terme général que j'appellerai X devient $X = 6x - 5 = 30 - 5 = 25$, cinquiéme terme de la serie proposée. Le *terme sommatoire* d'une serie (on peut le désigner par S) est une fonction de x dans laquelle si à la place de x on substitue un nombre entier positif, on aura la somme d'autant de termes que ce nombre contient d'unités. Le terme sommatoire S de la serie dont nous venons de parler étant $3xx - 2x$, si on suppose $x = 3$, on aura $S = 27 - 6 = 21$ somme des trois premiers termes de la serie.

Supposons une serie a, b, c, e, f, g, &c. dont le terme général correspondant au terme du rang x soit $= X$, le terme sommatoire étant représenté par S. Puisque S représente la somme d'autant de termes que x contient d'unités, la somme du nombre $x - 1$ de termes sera $= S - X$. Si l'on retranche cette quantité de la suivante S, le reste X sera la différence de $(S - X)$. Supposons $p = 1$, à cause de $X = D(S - X)$, nous aurons $M.X = (S - X)$; donc $S = M.X + X + C$. La quantité C doit être déterminée de maniere que lorsque $x = 0$, l'on ait aussi $S = 0$; de sorte que si x étant $= 0$, l'on trouve $S = 5$, l'on aura l'équation $S = 5 + C = 0$; donc C sera alors $= -5$. Si x

étant toujours $=0$, l'on trouvoit $S = -5 + C$, l'on auroit $C - 5 = 0$, & par conséquent $C = 0 + 5 = 5$. La raiſon en eſt que le terme ſommatoire S doit s'évanouir lorſque la valeur de la ſerie eſt nulle; or la valeur de la ſerie eſt nulle, ſi $x = 0$. Mais ſi $S = 0$, lorſque $x = 0$, dans ce cas C ſera $=0$. Si au lieu d'exprimer ſimplement par S comme ci-deſſus, le terme ſommatoire d'une ſerie dont le terme général eſt X, nous l'exprimons par S.X, nous aurons l'équation $S.X = M.X + X + C$, & faiſant toujours $p = 1$, & ſuppoſant ſucceſſivement $X = x^0, x^1, x^2, x^3, x^4$, &c. nous trouverons

$S.x^0 = x$

$S.x^1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

$S.x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x$

$S.x^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$

$S.x^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$

$S.x^5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2$

$S.x^6 = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x$

$S.x^7 = \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{2}x^7 + \frac{7}{12}x^6 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^2$

$S.x^8 = \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{2}x^8 + \frac{2}{3}x^7 - \frac{7}{15}x^5 + \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{30}x$

$S.x^9 = \frac{1}{10}x^{10} + \frac{1}{2}x^9 + \frac{3}{4}x^8 - \frac{7}{10}x^6 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{31}{20}x^2$

$S.x^{10} = \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{2}x^{10} + \frac{5}{6}x^9 - x^7 + x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{66}x$

$S.x^{11} = \frac{1}{12}x^{12} + \frac{1}{2}x^{11} + \frac{11}{12}x^{10} - \frac{11}{8}x^8 + \frac{11}{6}x^6 - \frac{11}{8}x^4 + \frac{5}{12}x^2$

$S.x^{12} = \frac{1}{13}x^{13} + \frac{1}{2}x^{12} + x^{11} - \frac{11}{6}x^9 + \frac{22}{7}x^7 - \frac{33}{10}x^5 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{691}{2730}x$

&c.

En examinant ces ſuites, on s'apperçoit qu'il y a une loi par laquelle les termes de la ſuivante peuvent ſe déduire de la précédente, ſi on en excepte le dernier terme dans les ſeries qui contiennent la premiere puiſſance de x. Omettant donc ce dernier terme, ſi on a $S.\ x^n = ax^{n+1} + bx^n + cx^{n-1} - ex^{n-3} + fx^{n-5} - gx^{n-7} + hx^{n-9} -$ &c. la ſomme ſuivante ſera

$$S.\ x^{n+1} = \frac{(n+1).a}{n+2}x^{n+2} + \frac{(n+1)b.}{n+1}x^{n+1} + \frac{(n+1).c}{n}x^n - \frac{(n+1)e.}{n-2}x^{n-2} + \frac{(n+1)f}{n-4}x^{n-4} - \frac{(n+1).g}{n-6}x^{n-6} + \frac{(n+1).h}{n-8}x^{n-8} - \text{\&c.}$$

Si n eſt un nombre pair, la ſerie que nous venons de trouver ſera exacte; mais ſi n eſt un nombre impair, il faudra ajouter un terme qui ſera $= \pm Px$.

Pour avoir la valeur de P, on ſuppoſera $x = 1$; donc dans ce cas on pourra ſuppoſer $x^{n+1} = 1 = x^0$, & $S.x^{n+1} = S.\ x^0 = x = 1$. C'eſt pourquoi on ſuppoſera la ſomme de tous les termes trouvés par la formule précédente $= 1$, & de cette ſuppoſition on déduira la valeur de P. Par exemple la valeur de $S.\ x^5$ étant $S.x^5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2$, l'on en conclura, en faiſant $n=5$, $S.x^{n+1} = S.x^6 = \frac{6}{7}.\frac{1}{5}.x^7 + \frac{6}{6}.\frac{1}{2}x^6 + \frac{6}{5}.\frac{5}{12}x^5 - \frac{6}{3}.\frac{1}{12}.x^3 + Px$, ou $S.x^6 = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + Px$. Qu'on faſſe maintenant $x = 1$ pour avoir $1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + P$, il viendra $P = \frac{1}{42}$, ainſi que cela doit être.

180. PROBLÊME. *Trouver le terme ſommatoire de la ſerie* 2, 7, 15, 26, 40, 57, 77, 100, &c. *dont le terme général eſt* $= \frac{3xx+x}{2}$. Le terme

général étant composé de deux membres $\frac{3}{2}xx$, $+\frac{1}{2}x$, cherchez séparément le terme sommatoire de chacun par les formules ci-dessus, pour avoir $S.\frac{3}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}xx + \frac{1}{4}x$, & $S.\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}xx + \frac{1}{4}x$. Ajoutant ensemble les deux termes sommatoires, leur somme donnera le terme sommatoire cherché; & l'on aura $S.\frac{3xx+x}{2} = \frac{1}{2}x^3 + xx + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(x+1)^2$. Si l'on suppose $x=5$, $\frac{5}{2}(6)^2 = 90$ sera la somme des cinq premiers termes de la serie.

181. PROBLÊME. *Trouver le terme sommatoire de la serie 1, 27, 125, 343, 729, 1331, &c. des cubes des nombres impairs dont le terme général est* $(2x-1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$, l'on aura $8.S.x^3 = 2x^4 + 4x^3 + 2x^2$; $-12.S.x^2 = -4x^3 - 6x^2 - 2x$; $+6.S.x = +3x^2 + 3x$; $-S.1 = -1.S.x^0 = -x$. Donc le terme sommatoire cherché sera $= 2x^4 - x^2 = xx(2xx-1)$. Si l'on suppose $x=6$, l'on aura $36 \times 71 = 2556$ pour la somme des six premiers termes de la serie proposée.

182. Lorsque le terme général est le produit de plusieurs facteurs simples qui forment une progression arithmétique, on peut trouver plus facilement le terme sommatoire par une méthode élégante que nous allons expliquer; mais nous avons besoin auparavant de faire quelques remarques. Si l'on proposoit de trouver la différence de la fonction $(x+p)(x+2p)=y$; parce qu'en substituant $x+p$ au lieu de x, l'on a $y^1 = (x+2p)(x+3p)$, l'on auroit $y^1 - y = Dy = 2p(x+2p) = 2.(x+2)$, en faisant $p=1$. Donc $M.(x+2p) = \frac{1}{2p}(x+p)(x+2p)$. De même puisque la différence de $(x+np)[x+(n+1)p]$

eſt $= 2p\,[x+(n+1)p]$, on aura $M.[x+(n+1)p] = \frac{1}{2p}(x+np)[x+(n+1)p]$, & $M.(x+np) = \frac{1}{2p}[x+(n-1)p](x+np)$. Si l'on a $y = [x+(n-1)p](x+np)[x+(n+1)p]$, on trouvera $Dy = 3p(x+np)[x+(n+1)p]$. C'eſt pourquoi $M.(x+np)[x+(n+1)p] = \frac{1}{3p}[x+(n-1)p](x+np)[x+(n+1)p]$.

De même $M.\Big((x+np)[x+(n+1)p] \times$

$[x+(n+2)p]\Big) = \frac{1}{4p}[x+(n-1)p](x+np) \times$
$[x+(n+1)p].[x+(n+2)p]$. Il eſt facile de continuer, la loi de ces ſommes étant évidente.

Si l'on ſuppoſe $p = 1$, l'on aura $M.(x+n) = \frac{1}{2}(x+n-1)(x+n)$; $M.(x+n)(x+n+1) = \frac{1}{3}.(x+n-1)(x+n)(x+n+1)$; & ainſi de ſuite.

Maintenant ſi nous ajoutons à ces ſommes le terme général, plus une conſtante qui faſſe évanouir le terme ſommatoire lorſque x eſt $= 0$, nous obtiendrons les termes ſommatoires ſuivans. $S.(x+n) = \frac{1}{2}(x+n)(x+n-1)+(x+n) - \frac{1}{2}n(n+1)$ (*); ou $S.(x+n) = \frac{1}{2}(x+n) \times (x+n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$; $S.(x+n)(x+n+1) = \frac{1}{3}(x+n)(x+n+1)(x+n+2) - \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$; $S.(x+n)(x+n+1)(x+n+2) = \frac{1}{4}(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3) - \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$; & ainſi de ſuite. Si l'on ſuppoſe $n = 0$, ou $n = -1$, la conſtante s'évanouira.

Ainſi le terme ſommatoire de la ſerie 1, 2, 3, 4, 5, &c. dont le terme général eſt x, ſera $= \frac{1}{2}x(x+1)$; & la ſerie ſommatoire, de la ſerie 1, 2, 3, &c.

(*) $[x+n]$ eſt le terme général, & $-\frac{1}{2}n(n+1)$ la conſtante ajoutée qui rend le terme ſommatoire $= 0$, lorſque $x = 0$.

c'eſt-à-dire, la ſerie dont le terme général eſt $\frac{1}{2}x(x+1)$, ſera 1, 3, 6, 10, 15, &c. dont le terme ſommatoire $= \frac{x.(x+1)(x+2)}{1.2.3}$, qui eſt le terme général de la ſerie 1, 4, 10, 20, 35, &c. dont le terme ſommatoire eſt $= \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1.2.3.4}$, terme général de la ſerie 1, 5, 15, 35, 70, &c. dont le terme ſommatoire eſt $=$ $\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{1.2.3.4.5}$.

183. Nous avons trouvé ci-deſſus (177) *la* formule $M.\left(\frac{1}{(x+np)[x+(n+1)p]}\right) = -\frac{1}{p}.\left(\frac{1}{x+np}\right)$, cette formule, en ſuppoſant $p = 1$, donne $M.\left(\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\right) = -1.\left(\frac{1}{x+n}\right)$; donc en ajoutant le terme général & une conſtante convenable, l'on aura le terme ſommatoire $S.\left(\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\right) = -1.\left(\frac{1}{x+n+1}\right) + \frac{1}{n+1}$. L'on aura de même

$$S.\left(\frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

L'on aura auſſi $S.\left[\frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)}\right] = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)}\right] + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$; il eſt facile de

continuer, la loi de ces formules étant manifeste. De plus il est bon d'observer qu'au lieu d'ajouter le terme général aux sommes trouvées ci-dessus, on peut se contenter d'écrire dans ces expressions $x+1$ au lieu de x.

Puisque $S. \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{x+n+1}$, & que $\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}$, on aura $S. \frac{1}{x+n} - S. \frac{1}{x+n+1} = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{x+n+1}\right)$. De-là je tire le lemme suivant.

LEMME. $S. \frac{1}{x+n} - S. \frac{1}{x+n+1} = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{x+n+1}\right)$.

184. PROBLÊME. *Trouver le terme sommatoire de la serie* $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{21}$, *&c. dont le terme général est* $= \frac{2}{xx+x}$. Parce que $\frac{2}{xx+x} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}$, l'on aura le terme sommatoire $S. \frac{2}{xx+x} = 2 S. \frac{1}{x} - 2. S. \frac{1}{x+1} = 2 - \frac{2}{x+1}$ (par le lemme précédent) $= \frac{2x}{x+1}$.

185. PROBLÊME. *Trouver le terme sommatoire de la serie* $\frac{1}{5}, \frac{1}{21}, \frac{1}{45}, \frac{1}{77}, \frac{1}{117}$, *&c. dont le terme général est* $= \frac{1}{4xx+4x-3}$. Ce terme est $= \frac{1}{(2x-1)(2x+3)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x-1}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x+3}\right)$

$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x+\frac{3}{2}}\right)$. Mais S. $\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right)$ $=$ S. $\left(\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right) + 2 - \left(\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)$, & S. $\left(\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)$ $=$ S. $\left(\frac{1}{x+\frac{3}{2}}\right) + \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{x+\frac{3}{2}}\right)$. Donc S. $\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right)$ $-$ S. $\left(\frac{1}{x+\frac{3}{2}}\right) = 2 + \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{1}{x+\frac{3}{2}}\right)$. Divisant donc cette valeur par 8, on aura le terme sommatoire cherché $= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} - \left(\frac{1}{8x+4}\right) - \left(\frac{1}{8x+12}\right) = \frac{x}{4x+2} + \frac{x}{3(4x+6)}$ $= \frac{x(4x+5)}{3(2x+1)(2x+3)}$.

186. De ce qu'on a dit ci-dessus (183), il suit qu'étant donnés les termes généraux qu'on voit ci-dessous dans la colonne A, les termes sommatoires correspondans seront les mêmes qu'on voit dans la colonne B.

TERMES GÉNÉRAUX. A	TERMES SOMMATOIRES. B
$\frac{1.2}{x(x+1)}$	$\frac{2}{1} - \frac{2}{x+1}$
$\frac{1.2.3}{x(x+1)(x+2)}$	$\frac{3}{2} - \frac{1.3}{(x+1)(x+2)}$
$\frac{1.2.3.4}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$	$\frac{4}{3} - \frac{1.2.4}{(x+1)(x+2)(x+3)}$
$\frac{1.2.3.4.5}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$	$\frac{5}{4} - \frac{1.2.3.5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$
&c.	&c.

Il est facile de continuer, la loi de ces expressions étant évidente (*). Cependant on ne peut pas trouver par ce moyen le terme sommatoire de la serie dont le terme général est $\frac{1}{x}$.

Si dans les termes sommatoires de la colonne B on suppose $x = \infty$, leurs derniers termes s'éva-

(*) Si l'on avoit la puissance $-m$ du binome $a+b$, les coefficients seroient, à compter du second terme, seroient, dis-je $-m$, $\frac{-m(-m-1)}{2}$, $\frac{-m(-m-1)(-m-2)}{2.3}$, $\frac{-m.(-m-1)(-m-2)(-m-3)}{2.3.4}$, &c. En changeant tous les signes, l'on auroit m, $\frac{m.(m+1)}{2}$, $\frac{m.(m+1)(m+2)}{2.3}$, $\frac{m.(m+1)(m+2)(m+3)}{2.3.4}$, &c., & en substituant x au lieu de m, il viendroit x, $\frac{x(x+1)}{2}$, $\frac{x.(x+1)(x+2)}{2.3}$, $\frac{x[x+1][x+2][x+3]}{2.3.4}$, &c. qui sont les termes généraux des suites des nombres figurés, en n'y comprenant pas la serie des nombres constans 1, 1, 1, &c. dont le terme général est $1 = x^{0}$. Mais $\frac{1.2}{x[x+1]}$ est le quotient de 1 divisé par $\frac{x[x+1]}{2}$; $\frac{1.2.3}{x(x+1)(x+2)}$ est le quotient de 1 divisé par $\frac{x[x+1][x+2]}{2.3}$; &c. Ainsi les termes généraux de la colonne A ne sont autre chose que les quotiens de l'unité divisée successivement par les nombres figurés, en n'y comprenant ni les nombres constans, ni les nombres naturels.

nouiront. C'eſt pourquoi les ſeries ſuivantes continuées à l'infini ont des ſommes finies.

$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \&c. = \frac{2}{1}$

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} + \&c. = \frac{3}{2}$

$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{70} + \&c. = \frac{4}{3}$

$1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{21} + \frac{1}{56} + \frac{1}{126} + \&c. = \frac{5}{4}$

$1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{28} + \frac{1}{84} + \frac{1}{210} + \&c. = \frac{6}{5}$

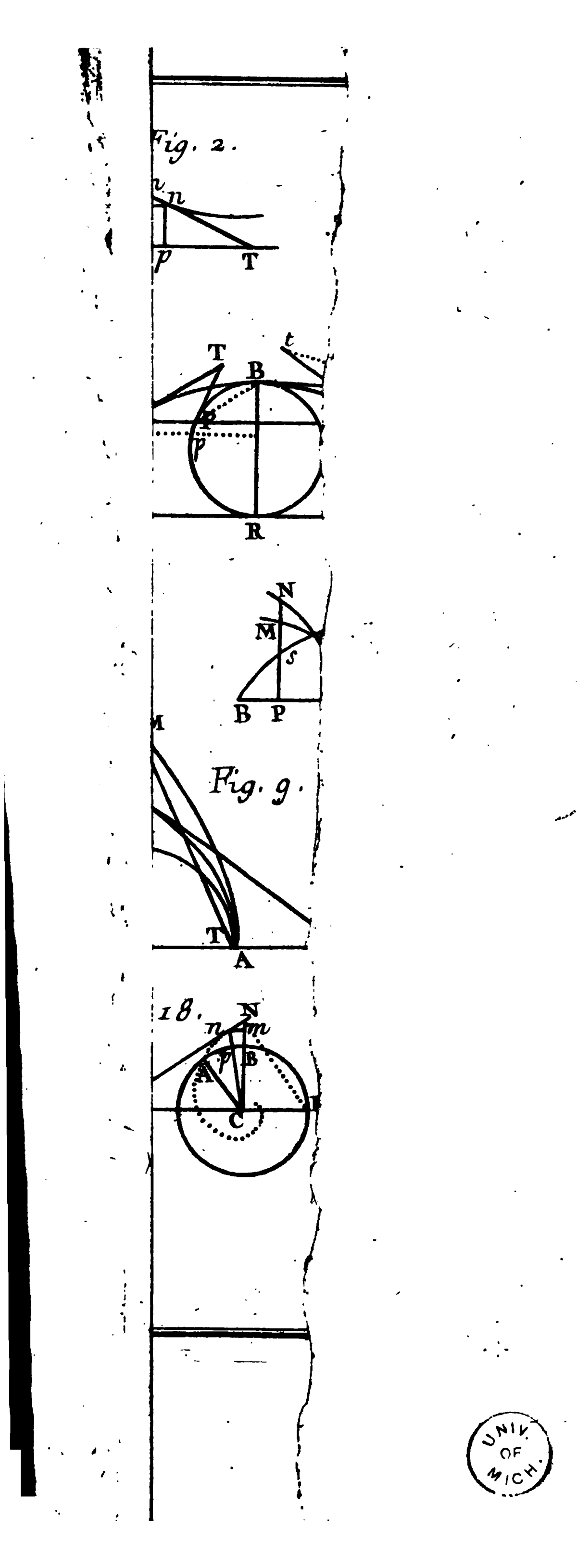
&c.

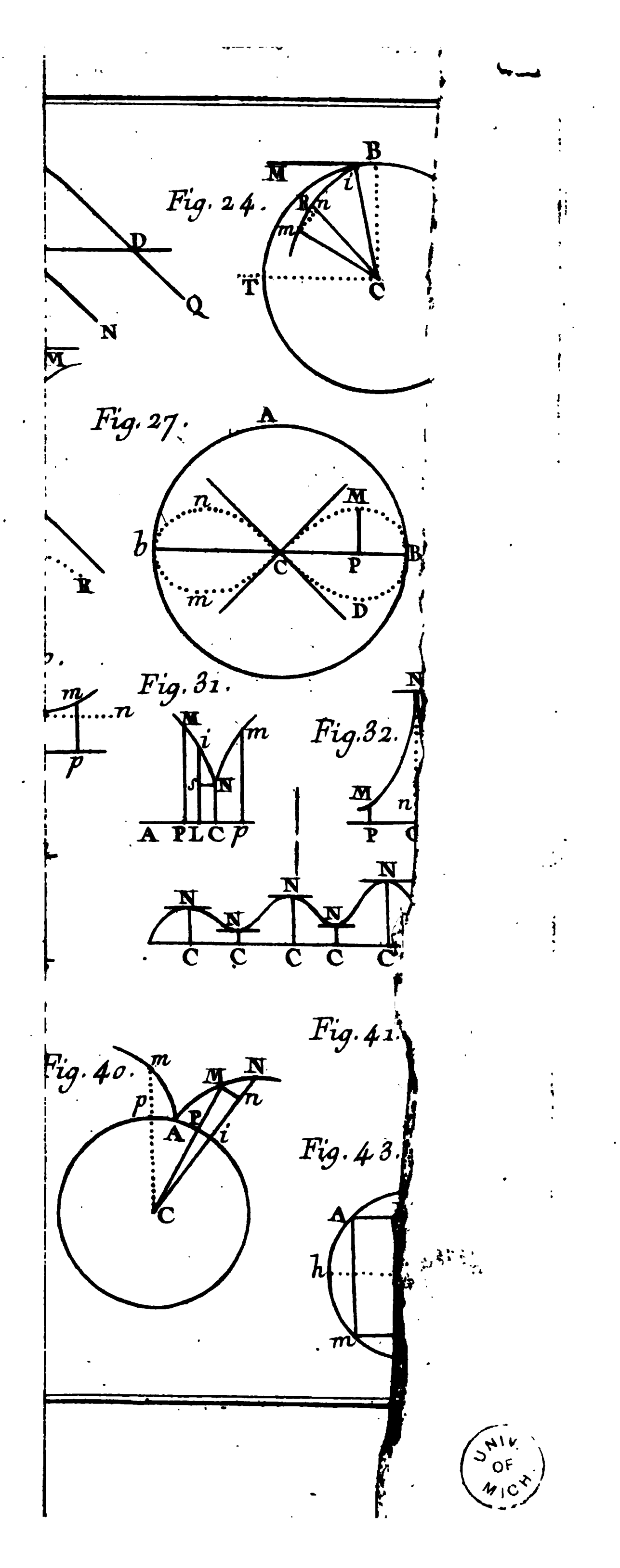
FIN.

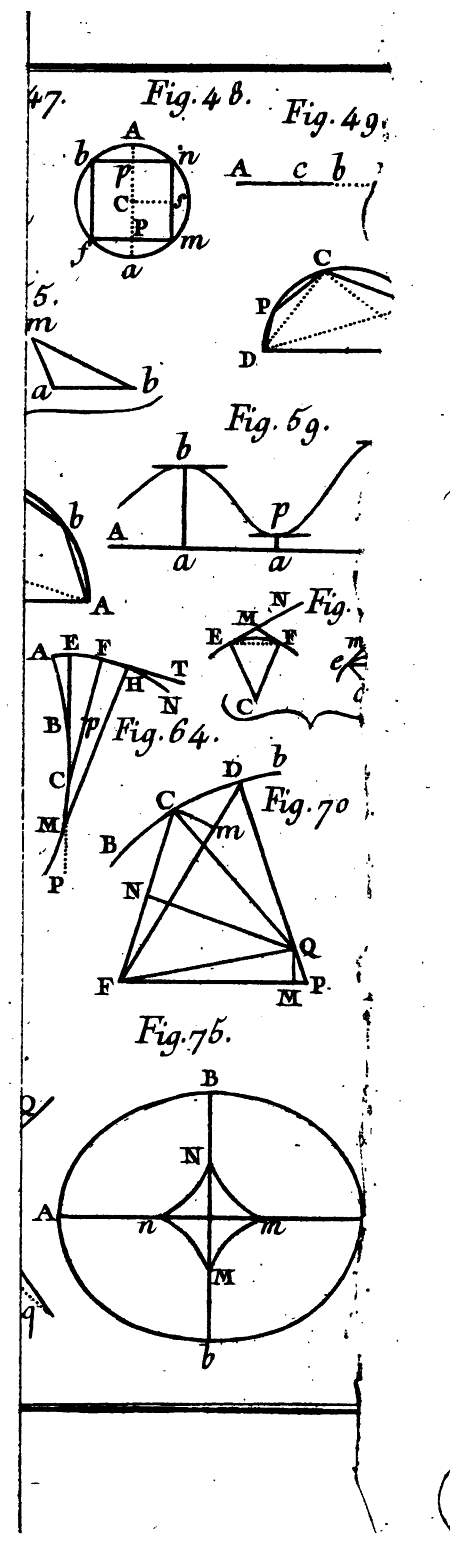


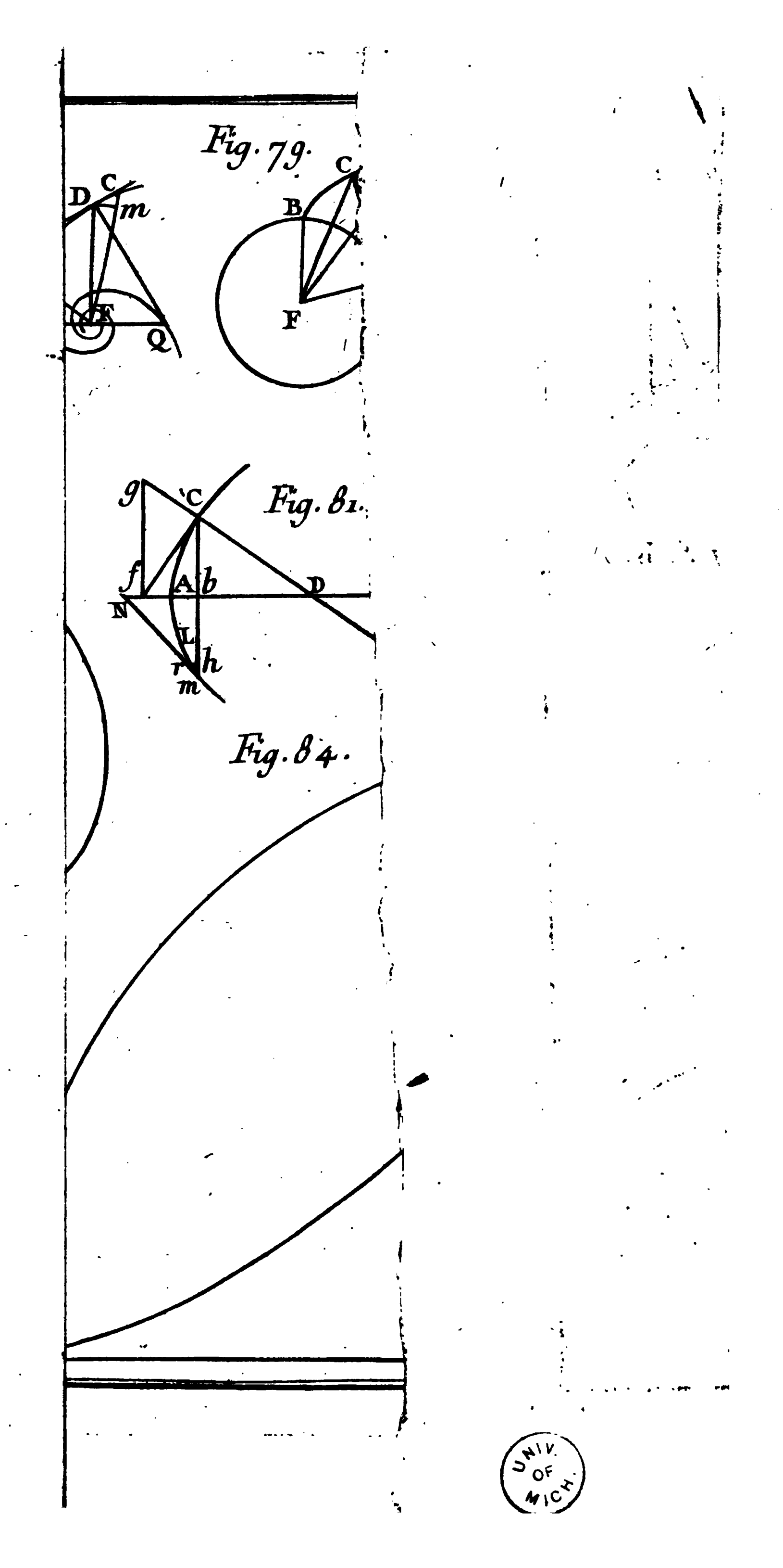
TABLE
DES MATIERES
Contenues en ce Volume.

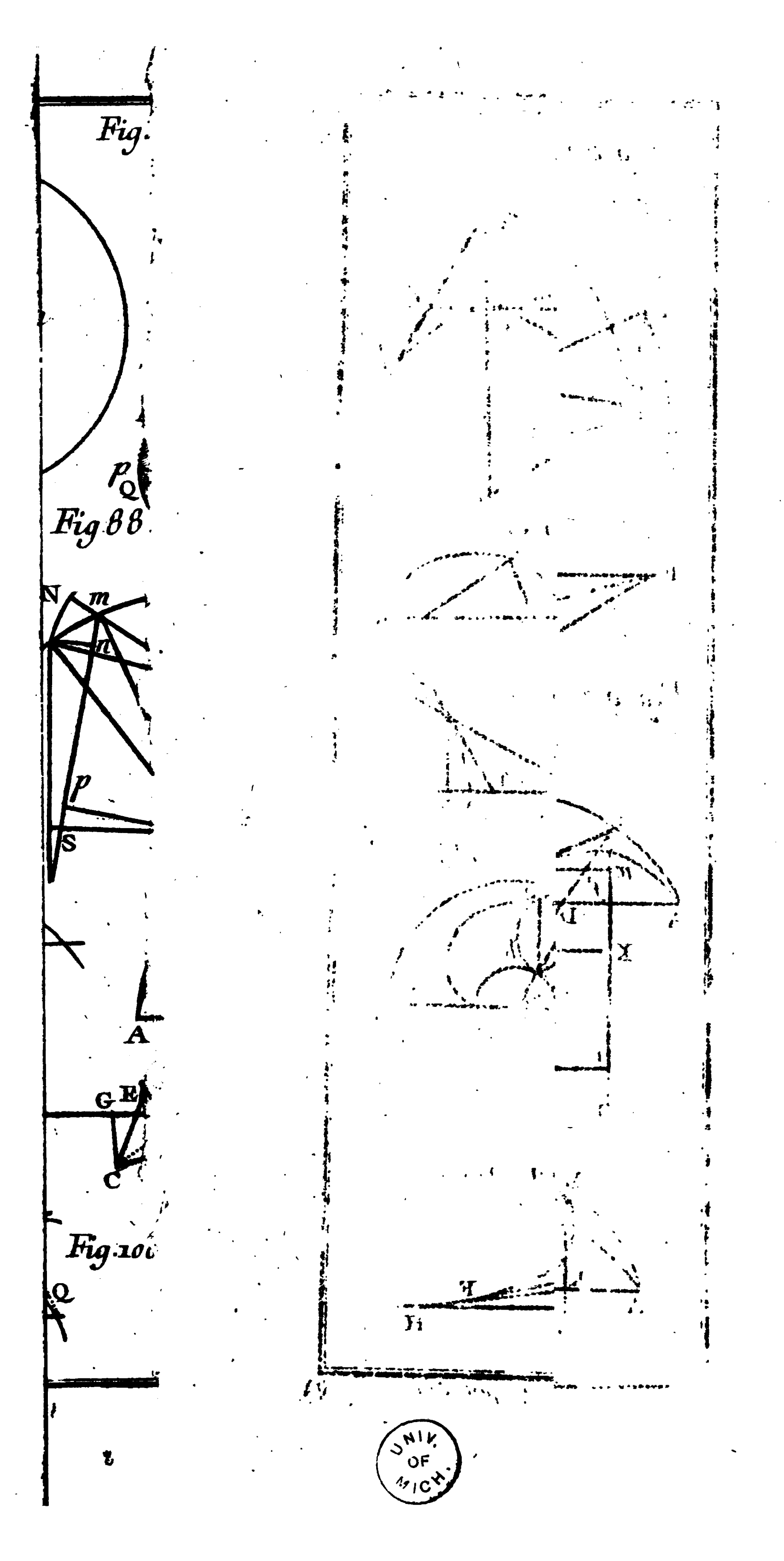
Fin de la Table des Matieres.


Fig. 2.
n
n
p
T
T
t
B
P
p
R
N
M
s
B P
M
Fig. 9.
T
A
18.
N
n
m
p
B
A
C


Fig. 24.
Fig. 27.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 43.


47.
Fig. 48.
Fig. 49.
5.
Fig. 59.
Fig.
Fig. 64.
Fig. 70
Fig. 75.


Fig. 79.
D
C
m
T
Q
B
C
F
Fig. 81.
g
C
f
A
b
D
N
L
h
r
m
Fig. 84.


Fig.
Fig. 88
N
m
n
p
S
A
G
E
C
Fig. 10
Q